

# Sistem Kendali Multivariabel



**ERWIN SUSANTO**

**FAKULTAS TEKNIK ELEKTRO  
UNIVERSITAS TELKOM**

**SEPTEMBER, 2017**

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

## KATA PENGANTAR

### **Bismillahirrohmaanirrohiim,**

Segala puji hanya bagi Alloh Subhanallohu wa Ta'ala, karena berkat pertolongan dan kemudahan dari-Nya, kami dapat menyusun buku "Sistem Kendali Multivariabel" ini. Buku ini, terkhusus ditujukan bagi para mahasiswa/i yang berkeinginan untuk mempelajari teori maupun aplikasi teknik kendali sederhana terutama yang berkaitan dengan teknik ruang keadaan (*state space*) dan sistem dengan peubah (*variable*) banyak. Tentu saja, pengetahuan dasar matematika, fisika dan dasar-dasar teknik kendali diperlukan untuk memahami materi yang disajikan. Buku desain kendali ini disusun berdasarkan pengalaman mengajar tim penulis dalam mata kuliah peminatan Teknik Kendali di Program Studi Teknik Elektro, Universitas Telkom Bandung.

Secara garis besar, materi yang disajikan meliputi pengenalan sistem kendali secara umum, sejarah singkat perkembangan teknik kendali, kendali kalang terbuka (*open – loop*) dan kalang tertutup (*closed – loop*), pemodelan matematik suatu sistem fisik, desain kendali menggunakan ruang keadaan, umpan balik keadaan dan estimator keadaan beserta contoh-contoh aplikasinya.

Berikutnya, kami ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada semua pihak, diantaranya Bagian Pembelajaran Universitas Telkom dan Fakultas Teknik Elektro yang telah memfasilitasi penulisan dan penyusunan, rekan pengajar bidang kendali yang telah memberikan saran dan pengayaan materi dan pihak-pihak yang tidak bisa kami sebutkan satu-persatu. Besar harapan kami, buku ini bermanfaat bagi pembaca sekalian terutama para mahasiswa/i yang belajar sistem kendali.

Akhir kata, komentar dan masukan yang membangun sangat diharapkan bagi penyempurnaan buku ini.

Bandung, 2017

Penyusun

---

## Daftar Isi

---

<b>1</b>	<b>Sekilas Tentang Sistem Kendali</b>	<b>1</b>
1.1	Sejarah Singkat Perkembangan Teknik Kendali . . . . .	3
1.2	Sistem Kendali Dasar . . . . .	4
1.2.1	Kendali lup tertutup dan kendali lup terbuka . . . . .	7
1.2.2	Konfigurasi sistem umpan balik . . . . .	8
1.3	Soal Latihan . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Model Matematik</b>	<b>11</b>
2.1	Pendahuluan . . . . .	11
2.2	Rangkaian Listrik Dasar . . . . .	13
2.3	Sistem Mekanik Dasar . . . . .	14
2.4	Sistem Thermal Dasar . . . . .	17
2.5	Transformasi Laplace . . . . .	20
2.6	Soal Latihan . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Ruang Keadaan (<i>StateSpace</i>)</b>	<b>31</b>
3.1	Gambaran Umum . . . . .	31
3.2	Keunggulan metode Ruang Keadaan . . . . .	31
3.3	Deskripsi Sistem . . . . .	33
3.4	Relasi Antara Ruang Keadaan dan Fungsi Alih . . . . .	35
3.5	Diagram Blok dan Ruang Keadaan . . . . .	36

3.6	Bentuk Kanonik Ruang Keadaan . . . . .	37
3.6.1	Bentuk Kanonik Terkendali ( <i>Controllable canonical form</i> ) . . . . .	38
3.6.2	Bentuk Kanonik Teramati ( <i>Observable canonical form</i> ) . . . . .	38
3.6.3	Bentuk Kanonik Diagonal ( <i>Diagonal canonical form</i> ) . . . . .	39
3.6.4	Bentuk Kanonik Jordan ( <i>Jordan canonical form</i> ) . . . . .	39
3.7	Keterkendalian ( <i>Controllability</i> ) dan Keteramatan ( <i>Observability</i> ) . . . . .	40
3.7.1	Keterkendalian ( <i>Controllability</i> ) . . . . .	41
3.7.2	Keteramatan ( <i>Observability</i> ) . . . . .	43
3.8	Soal Latihan . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Desain Kendali via Ruang Keadaan</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Pendahuluan . . . . .	47
4.2	Desain Aksi Kendali . . . . .	48
4.2.1	Kendali untuk sistem umpan balik keadaan penuh ( <i>full order state feedback</i> ) dengan masukan acuan ( <i>reference input</i> ) . . . . .	51
4.2.2	Pemilihan Lokasi <i>Poles</i> . . . . .	54
4.2.2.1	Dominasi <i>Poles</i> orde dua . . . . .	54
4.2.2.2	Kedudukan akar simetri ( <i>Symmetric Root Locus, SRL</i> ) . . . . .	58
4.3	Desain Estimator . . . . .	60
4.3.1	Estimator Orde Penuh ( <i>Full Order Estimator</i> ) . . . . .	60
4.3.2	Estimator Orde Terkurangi ( <i>Reduced Order Estimator</i> ) . . . . .	63
4.3.3	Pemilihan lokasi <i>pole</i> estimator . . . . .	66
4.4	Desain Kompensator Kombinasi Kendali dan Estimator . . . . .	69
4.4.1	<i>Pole – pole</i> kombinasi kendali dan estimator . . . . .	71
4.4.2	Fungsi alih kompensator . . . . .	72
4.4.3	Fungsi alih kompensator orde terkurangi . . . . .	73
4.5	Soal Latihan . . . . .	74

<b>5</b>	<b>Desain Kompensator dengan Masukan Acuan</b>	<b>77</b>
5.1	Gambaran Umum . . . . .	77
5.1.1	Struktur pada Masukan Acuan . . . . .	78
5.1.2	Pemilihan Penguatan ( <i>Gain</i> ) . . . . .	84
5.2	Kendali Integral dan Penjejakan Kokoh ( <i>Robust Tracking</i> )	84
5.2.1	Kendali Integral . . . . .	84
5.2.2	Penjejakan Kokoh . . . . .	87
5.3	Soal Latihan . . . . .	88
	<b>Daftar Pustaka</b>	<b>89</b>
	<b>Lampiran Kode Program</b>	<b>91</b>

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

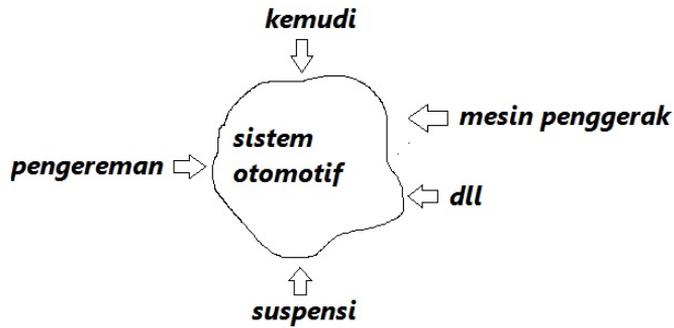
---

## Sekilas Tentang Sistem Kendali

---

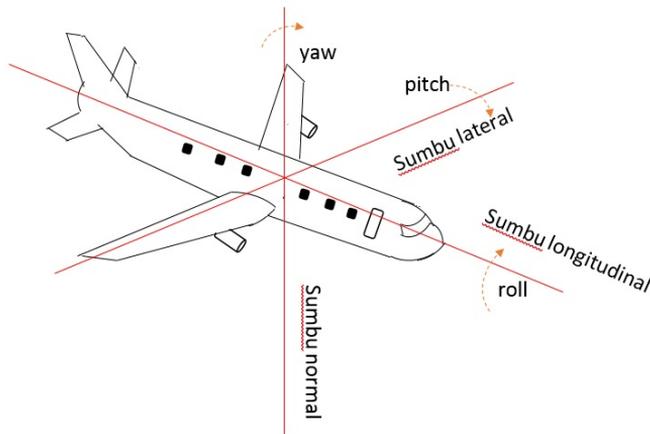
Istilah sistem sering dijumpai di berbagai bidang ilmu baik yang eksakta maupun non-eksakta seperti ilmu teknik, ekonomi, manajemen ekologi, sosial, fisika dan kimia. Sistem sendiri merupakan gabungan dari berbagai komponen atau sistem yang lebih kecil (*sub system*) yang dapat melakukan aksi untuk sebuah tujuan tertentu. Sistem otomotif contohnya, tersusun atas banyak sub-sistem pendukung seperti sistem pengemudian (*electronic power steering*), pengereman (*auto breaking system*), suspensi, pendingin mesin penggerak, sistem pelumasan dan lain-lain.

Secara umum, sistem kendali dapat dipandang sebagai hubungan berbagai komponen, seperti elektrik, mekanik, hidrolis bahkan parameter dan variabel sosial, biologi, keuangan dengan tujuan mendapatkan fungsi yang diinginkan secara efisien dan akurat. Karena kemajuan dalam teori dan aplikasi kendali otomatis menawarkan kinerja yang optimal bagi suatu sistem dinamik, meningkatkan produktifitas, menyederhanakan operasi manual yang seringkali berulang-ulang maka banyak insinyur dan ilmuwan dewasa ini tertarik untuk menekuni bidang ilmu teknik kendali sehingga telah banyak yang memiliki pemahaman yang baik tentang kendali otomatis.



Gambar 1.1: Sistem Otomotif

Beberapa contoh aplikasi kendali otomatis yang berkaitan dengan industri dan teknologi, misalnya kendali numerik pada peralatan permesinan, sistem autopilot pada industri pesawat terbang, industri otomotif, kendali pada industri proses seperti pengaturan tekanan, temperatur, kelembaban dan kekentalan cairan.

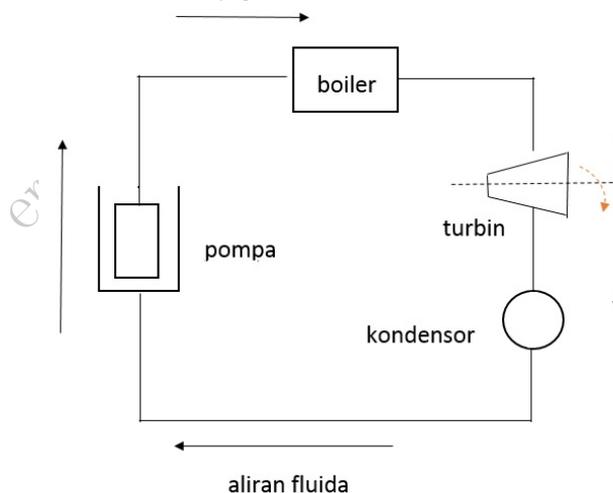


Gambar 1.2: Pergerakan Pesawat

## 1.1 Sejarah Singkat Perkembangan Teknik Kendali

Ide pemanfaatan kendali otomatis, pertama kali dilakukan oleh James Watt (1736 -1819) dengan menciptakan alat pengatur sentrifugal yang berfungsi mengendalikan putaran mesin uap pada abad ke 18. Temuan James Watt ini mengembangkan mesin uap yang telah dibuat sebelumnya oleh Thomas Savery (1650-1715) dan Thomas Newcomen (1663-1729). Berbeda dengan karya ilmuwan sebelumnya, James Watt telah memperkenalkan metode dan instrumen pengaturan putaran pada mesin uapnya.

Kemudian, pengembangan teori kendali otomatis diawali oleh beberapa ilmuwan seperti Minorsky (1922) dengan kendali otomatis pengemudian kapal sekaligus berhasil menjelaskan stabilitas sistem berdasarkan persamaan differensial, Nyquist (1932) yang mengembangkan prosedur sederhana untuk menjelaskan kestabilan sistem lup tertutup berbasis tanggapan lup terbuka untuk masukan sinusoida kondisi ajeak (*steady state*), dan Hazen (1934) yang mengenalkan istilah servomekanik untuk sistem kendali posisi dan desain rele servomekanis dengan kemampuan mengikuti perubahan masukan.



Gambar 1.3: Skema mesin uap sederhana

Selama dekade 1940-an, metode respon frekuensi dan Bode diagram telah digunakan untuk analisa dan desain sistem kendali lup tertutup linier. Diakhir 1940-an dan diawal 1950-an, metode kedudukan akar (*root locus*) telah dikembangkan oleh Evans. Kedua metode respons frekuensi dan kedudukan akar ini merupakan teori kendali klasik yang banyak digunakan untuk memenuhi kebutuhan kinerja dan kestabilan sistem.

Seiring waktu, permasalahan dinamika sistem menjadi semakin kompleks dengan melibatkan banyak masukan dan banyak keluaran (*multi input-multi output*) sehingga membutuhkan banyak persamaan dan model matematik yang rumit. Hal ini menjadikan analisa dan desain menggunakan teori kendali klasik yang hanya sesuai untuk sistem sederhana dengan satu masukan satu keluaran (*single input-single output*) tidak lagi memadai. Sejak tahun 1960, keberadaan teknologi digital turut berperan bagi perkembangan teknologi kendali otomatis. Analisa sistem yang kompleks, teori kendali modern berbasis analisa dan sintesa domain waktu menggunakan peubah keadaan (*state variables*) telah digunakan untuk mengatasi kompleksitas sistem modern dan meningkatkan akurasi analisa dan sintesa sistem kendali.

Selama kurun 1960-1980, kendali optimal untuk sistem yang deterministik maupun stokastik, penelitian tentang kendali adaptif dan sistem cerdas telah dikembangkan. Selanjutnya sejak tahun 1980 metode kendali kokoh yang mempertimbangkan ketidakpastian yang disebabkan oleh gangguan, kesalahan pemodelan dan perubahan sistem juga telah diteliti dan dikembangkan. Dewasa ini, aplikasi sistem dan teknik kendali bukan hanya digunakan dalam bidang rekayasa teknik, melainkan telah dimanfaatkan untuk memecahkan berbagai persoalan di bidang biologi, biomedis, ekonomi, sosio-ekonomi dan sebagainya.

## 1.2 Sistem Kendali Dasar

Sebelum kita mendiskusikan sistem kendali, beberapa istilah dasar berikut perlu dijelaskan, berikut ini:

- Peubah terkendali (*controlled variable*) dan peubah termanipulasi (*manipulated variable*). Peubah terkendali merupakan kuantitas ataupun kondisi yang diukur dan dikendalikan. Adapun

peubah termanipulasi merupakan kuantitas atau kondisi yang diubah oleh kendali (*controller*) sehingga dapat mempengaruhi nilai peubah terkendali, yang biasanya merupakan keluaran sistem.

- *Plant*. Sebuah plant dapat berupa peralatan dan instrumen yang difungsikan sebagai bagian dari sistem yang dikendalikan. Contoh plant misalkan peralatan mekanik, tungku bakar, reaktor kimia, pesawat luar angkasa dan sebagainya
- *Proses*. Berbeda dengan plant, sebuah proses merupakan prosedur dan mekanisme yang dikendalikan sama seperti pada plant. Kendali sistem pemisahan cairan kimia, kolom distilasi merupakan sistem kendali yang bekerja pada sebuah proses.
- *Sistem*. Semua komponen yang berhubungan dan memiliki tujuan tertentu, termasuk efisiensi, otomasi dan optimasi akan membentuk sebuah sistem
- *Gangguan (disturbance)*. Pada sistem riil, gangguan hampir selalu dijumpai dan seringkali berpengaruh pada stabilitas dan kinerja sistem. Gangguan ini dapat disebabkan oleh sistem itu sendiri (*internal disturbance*) maupun gangguan luar sistem (*eksternal disturbance*). Gangguan dapat berupa perubahan parameter sistem karena pengoperasian dan kelelahan (*fatigue*) maupun gangguan sinyal interferensi pengaruh lingkungan dan alam seperti perubahan cuaca, petir dan sebagainya
- *Kendali Umpan Balik (feedback control)*. Adanya gangguan, memunculkan perbedaan antara keluaran dengan masukan acuan yang sulit diprediksi mengakibatkan tujuan pengoperasian sebuah sistem tidak tercapai. Untuk itu, diperlukan umpan balik keluaran untuk dibandingkan dengan masukan acuan sehingga selisih perbedaan dapat dikendalikan, diminimalkan secara otomatis

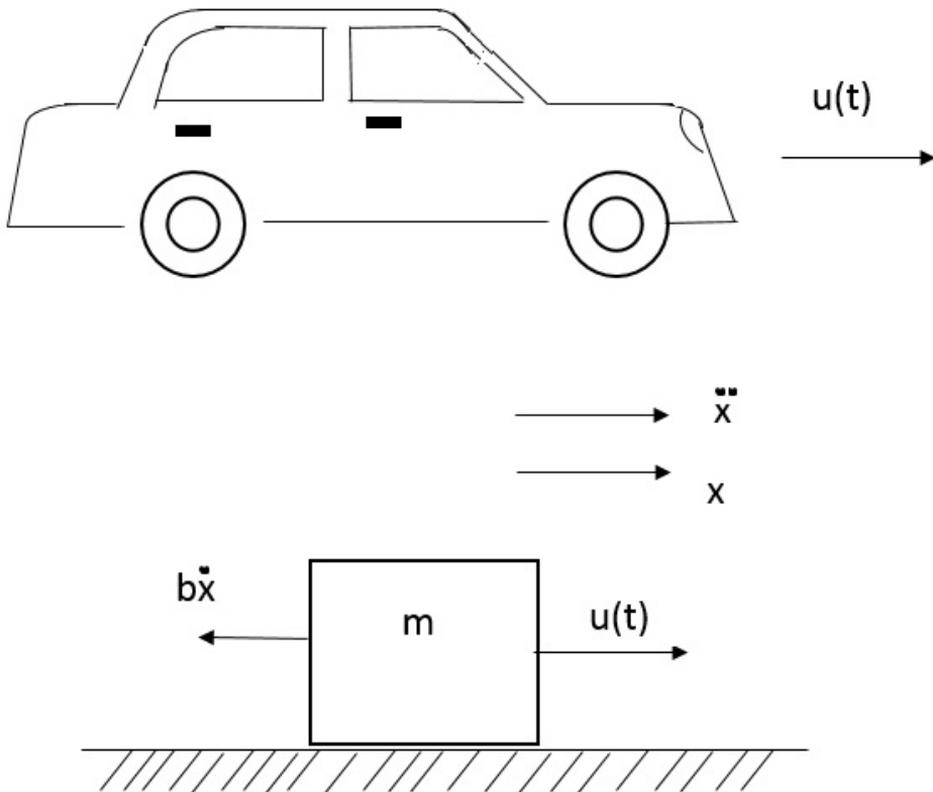
Karakteristik dan dinamika sistem seringkali dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial berbagai sistem kompleks seperti pada sistem mekanik, elektrik, elektromekanik dapat dideskripsikan

sebagai peubah keadaan posisi, kecepatan, tegangan kapasitor dan arus induktor. Dengan demikian, dinamika gerak suatu sistem dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial.

Sebagai contoh ilustrasi, perhatikan sistem pada Gambar 1.4 dibawah ini, dengan mengaplikasikan hukum Newton tentang gerak,

$$u - b\dot{x} = m\ddot{x} \quad (1.1)$$

Dengan mendefinisikan peubah keadaan berikut,



Gambar 1.4: Gerak Kendaraan dan Diagram Badan Bebasnya

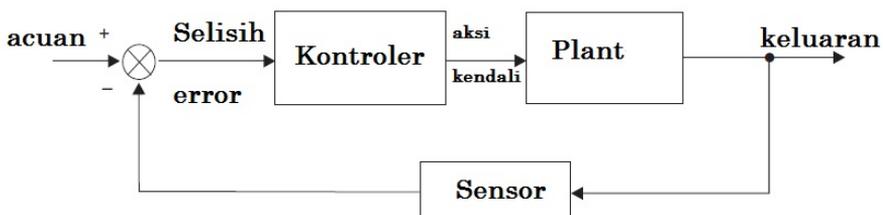
$$x = x_1, \dot{x} = \dot{x}_1 = x_2 \quad (1.2)$$

maka deskripsi sistem dalam persamaan diferensial akan dapat dilakukan. Selanjutnya, ruang keadaan (*state space*) juga dengan mudah dideskripsikan.

### 1.2.1 Kendali lup tertutup dan kendali lup terbuka

Kendali umpan balik (*feedback control*) merupakan sistem kendali lup tertutup. Sistem ini menjaga koneksi masukan dan keluaran dengan membandingkannya dan menggunakannya sebagai sinyal kendali. Sebagai contoh, sistem pengatur temperatur ruangan yang menjaga suhu secara kontinyu pada nilai tertentu,  $19^{\circ}$  C misalnya. Jika suhu meningkat, maka fan pendingin akan bekerja dan jika suhu turun maka fan pendingin akan berhenti.

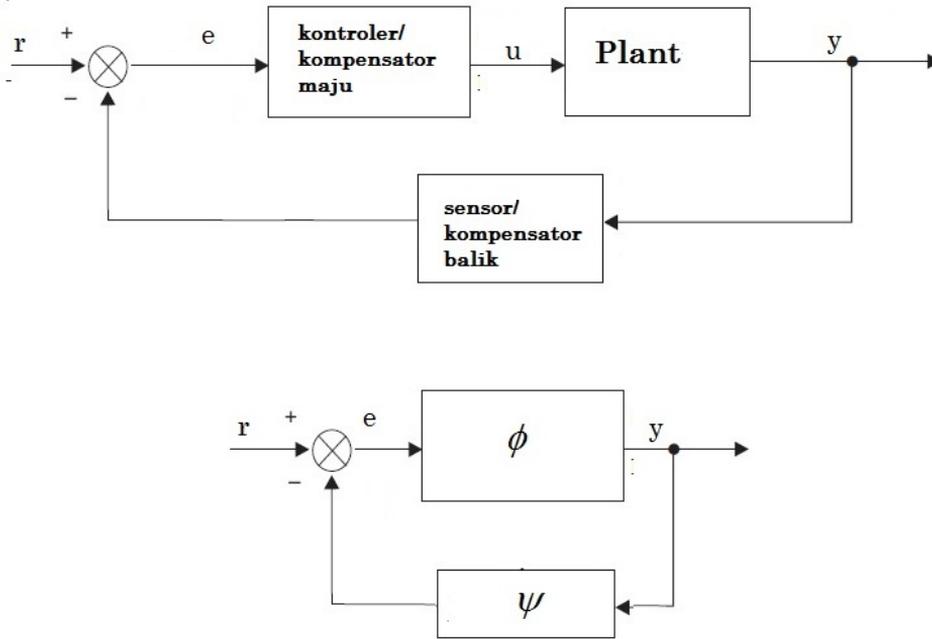
Sistem kendali umpan balik tidak hanya dijumpai pada bidang teknik saja, melainkan pada bidang-bidang non teknik seperti pada sistem biologi kekebalan tubuh manusia terhadap gangguan seperti virus dan bakteri penyakit. Adapun sistem kendali lup terbuka, karena tidak ada umpan balik maka keluaran sistem tidak berpengaruh pada aksi kendali. Atau dengan kata lain masukan acuan bersifat tetap sehingga kinerjanya tergantung pada penyetulan secara manual, dan memerlukan kalibrasi lebih sering. Contoh sistem lup terbuka adalah *fruit juicer*, dimana kita bisa membuat jus buah dengan menekan tombol untuk mengaktifkan motor listrik dengan beberapa pilihan kecepatan putaran. Disini, motor listrik pada *juicer* tidak bisa secara otomatis mengubah putarannya karena perbedaan tekstur buah misalnya, tanpa kita pilih terlebih dulu.



Gambar 1.5: Sistem Kendali Lup Terbuka dan Tertutup

## 1.2.2 Konfigurasi sistem umpan balik

Untuk memahami dan menganalisa sistem umpan balik yang merupakan sistem kendali lup tertutup seperti pada Gambar 1.5, perlu diperhatikan simbol yang dipakai untuk setiap peubah pada blok diagram berikut ini:



Gambar 1.6: Konfigurasi umpan balik dan ekuivalennya

Pada ekuivalen konfigurasi umpan balik Gambar 1.6 diatas, plant *controller* /kompensator maju direpresentasikan sebagai sebuah pemetaan input output (*IO map*)  $\phi$ , sedangkan kompensator balik atau sensor memiliki (*IO map*)  $\psi$ . Sistem umpan balik ditampilkan dalam bentuk

$$y = \phi(e) \quad (1.3)$$

$$e = r - \psi(y) \quad (1.4)$$

Sehingga sinyal kesalahan (*error*) memenuhi

$$e = r - \psi(\phi(e)) \quad (1.5)$$

$$e + \gamma(e) = r \quad (1.6)$$

dimana  $\gamma = \psi \circ \phi$  merupakan *IO map* dari plant dengan kompensator balik dan biasa disebut *lup peta IO (loop IO map)*

### 1.3 Soal Latihan

1. Sebutkan 3 aplikasi sistem kendali lup terbuka yang mudah anda jumpai, buatlah diagram blok sederhana yang menggambarkan cara kerja sistem tersebut
2. Sebutkan 3 aplikasi sistem kendali lup tertutup yang mudah anda jumpai, buatlah diagram blok sederhana yang menggambarkan cara kerja sistem tersebut
3. Anggaplah kita memiliki tandon penyimpanan air yang perlu diisi air secara otomatis dan kontinyu. Desainlah sistem pengisi air otomatis. Klasifikasikan instrumen dan peralatan yang digunakan, termasuk peubah terkendali, peubah termanipulasi, masukan dan keluaran sistem selengkap mungkin. Lengkapi pula dengan diagram blok.
4. Ilustrasikan sistem pengendalian anggaran dalam bentuk diagram blok dengan melibatkan komponen-komponen fiskal seperti pajak, ekspor impor, hasil sumber daya alam, pembayaran hutang dan lain-lain

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

### 2.1 Pendahuluan

Seringkali, perilaku dinamik suatu sistem fisik perlu untuk ditampilkan dalam bentuk model persamaan matematik. Model ini diperoleh dari karakteristik komponen sistem, seperti masa suatu sistem mekanik, resistansi sistem elektrik dan sebagainya. Atau juga bisa diperoleh dari pengukuran dan eksperimen untuk mengetahui relasi masukan dan tanggapan sebuah sistem misalnya. Untuk memulai belajar sistem kendali, dibutuhkan kemampuan untuk memodelkan sistem dinamik dan menganalisa karakteristik dinamik sistem tersebut. Ketika model matematik sebuah sistem diketahui, maka berbagai analisa dan tool komputasi dengan komputer dapat disimulasikan sehingga analisa sistem dapat dilakukan secara terstruktur dan lebih mudah.

Model matematika sebuah sistem dinamik merupakan sekumpulan persamaan matematik yang merepresentasikan sistem secara akurat, paling tidak mendekati dengan keadaan sesungguhnya dari sebuah sistem. Perlu diingat bahwa seringkali model matematik yang diperoleh dari sebuah sistem fisik tidak selalu unik, artinya seringkali lebih dari satu model matematik. Hal ini disebabkan oleh persepsi seorang insi-

nyur matematika atau kendali dapat berbeda pendekatannya, termasuk cara pengukuran maupun asumsi yang digunakan. Pada banyak kasus, dinamika sistem baik fisik seperti elektrik, mekanik, termal maupun non fisik seperti biologi, sosial, keuangan dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial. Sebagai contoh, hukum Newton dapat digunakan untuk menjelaskan model matematik sebuah sistem mekanik dan hukum Kirchoff digunakan untuk pemodelan sistem elektrik.

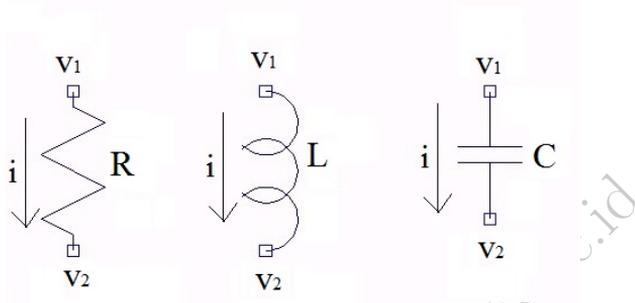
Asumsi yang digunakan pada pemodelan matematik menghasilkan bentuk persamaan yang berbeda, tergantung kekhususan, permasalahan dan metode kendali yang digunakan. Sebagai contoh, model ruang keadaan (*state space*) lebih disukai untuk menyelesaikan persoalan metode kendali optimal sistem MIMO (*multi input multi output*) sedangkan untuk permasalahan analisa transient dan tanggapan frekuensi pada sistem linier tak varian SISO (*single input single output*) maka model fungsi alih lebih sesuai.

Sebuah sistem dikatakan linier jika memenuhi prinsip superposisi, dimana sistem dengan masukan yang berbeda akan menghasilkan keluaran yang berbeda dan jika beberapa masukan tersebut secara bersamaan diaplikasikan akan menghasilkan keluaran yang merupakan penjumlahan dari masing-masing sistem untuk masukan yang berbeda tersebut. Anggaplah sebuah sistem  $y = f(x)$ , untuk masukan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  menghasilkan  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ , dimana  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ . Pada kasus eksperimen dan pengukuran, jika sebab dan pengaruhnya proporsional, sistem juga dikatakan linier. Kemudian suatu persamaan diferensial dikatakan linier jika koefisien-koefisiennya merupakan konstanta atau berupa peubah yang bebas. Jika sistem dideskripsikan dengan persamaan diferensial dengan koefisien yang berubah terhadap waktu, maka dikatakan sistem yang berubah waktu (*time varying*), sebaliknya yang tidak tergantung waktu disebut *time invariant*. Pada buku ini, kita fokuskan pada sistem yang linier dan *time invariant* (*linear time invariant, LTI*). Di sini akan disebutkan beberapa model matematik dari sistem elektrik, mekanik, termal sebagai berikut:

## 2.2 Rangkaian Listrik Dasar

Model matematik untuk rangkaian listrik dasar umumnya akan berkaitan dengan komponen resistor  $R$ , induktor  $L$  dan kapasitor  $C$ .

Untuk komponen resistif, berlaku persamaan tegangan listrik berikut



Gambar 2.1: Skema dari resistor, induktor dan kapasitor

$$v_1(t) - v_2(t) = Ri(t) \quad (2.1)$$

Untuk komponen induktif,

$$v_1(t) - v_2(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (2.2)$$

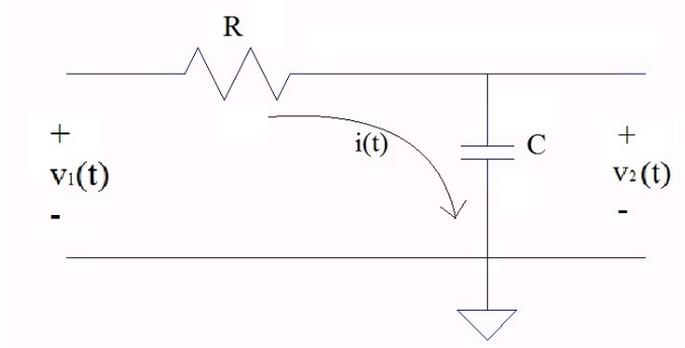
Sedangkan untuk komponen kapasitif

$$v_1(t) - v_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.3)$$

Untuk lebih jelasnya, beberapa contoh permasalahan rangkaian listrik diuraikan disini. Sebuah rangkaian  $RC$  pada gambar 2.2 dibawah memiliki persamaan differensial sebagai berikut:

$$v_1(t) - v_2(t) = Ri(t) \quad (2.4)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.5)$$



Gambar 2.2: Rangkaian  $RC$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial orde satu berikut:

$$RC \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = v_1(t) \quad (2.6)$$

Contoh lain, sebuah rangkaian  $RLC$  dapat diuraikan dalam beberapa persamaan berikut:

$$v_1(t) - v_2(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) \quad (2.7)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.8)$$

Maka diperoleh persamaan differensial orde dua relasi masukan keluaran, berikut ini:

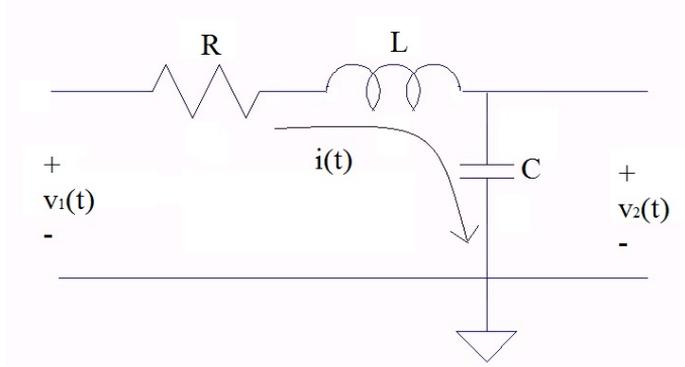
$$LC \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = v_1(t) \quad (2.9)$$

## 2.3 Sistem Mekanik Dasar

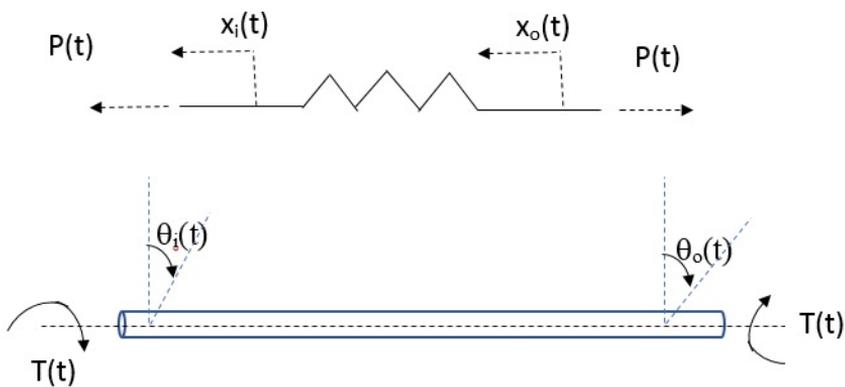
Model matematik sistem mekanik pada suatu benda didasarkan pada karakteristik elastisitas, redaman dan massa. Persamaan gaya elastisitas (bayangkan pegas yang memiliki kelenturan dan elastisitas) translasi dan torsi elastisitas rotasi, dituliskan berikut ini:

$$P(t) = K(x_i(t) - x_o(t)) \quad (2.10)$$

$$T(t) = K(\theta_i(t) - \theta_o(t)) \quad (2.11)$$



Gambar 2.3: Rangkaian  $RLC$



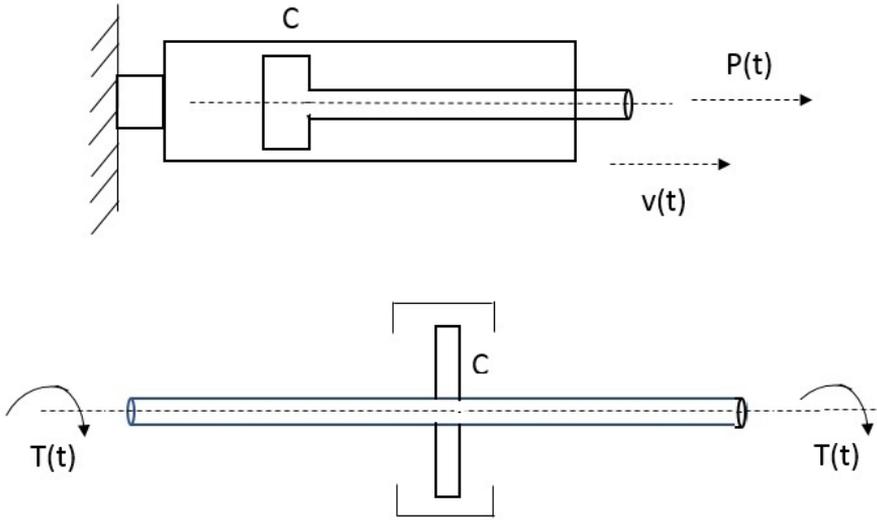
Gambar 2.4: Elastisitas linier: translasi dan rotasional

Besar gaya redaman atau torsi mekanik pada sebuah benda sebanding dengan kecepatan. Persamaan gaya redaman translasi dan torsi redaman rotasi dituliskan sebagai berikut:

$$P(t) = C \frac{dx_o(t)}{dt} = Cv(t) \quad (2.12)$$

$$T(t) = C \frac{d\theta_o(t)}{dt} = C\omega(t) \quad (2.13)$$

Kemudian, gaya yang bekerja pada suatu benda akan sebanding de-



Gambar 2.5: Redaman linier

ngan perkalian massa dan percepatan, sedangkan torsi rotasi akan sebanding dengan perkalian momen inersia dan percepatan anguler. Untuk gaya translasi dan torsi rotasi masing-masing dirumuskan:

$$P(t) = ma(t) = m \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.14)$$

$$T(t) = I \frac{d\omega(t)}{dt} = I\alpha(t) \quad (2.15)$$

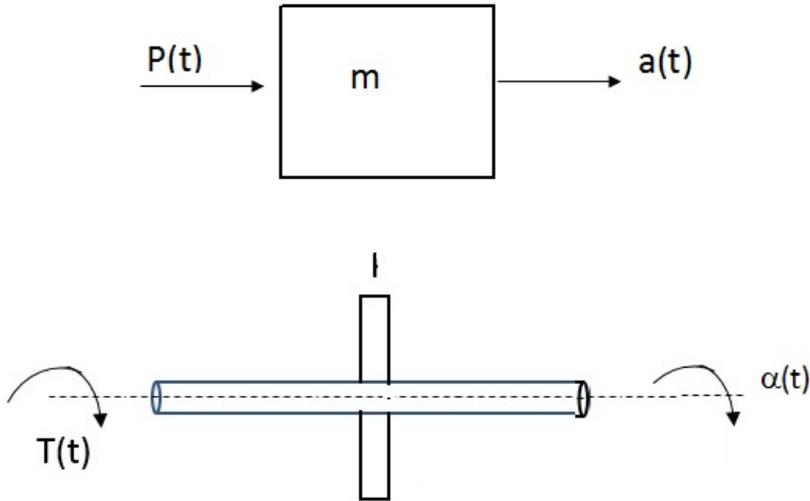
Berikut adalah contoh persoalan pemodelan pada sistem massa-redaman-pegas (*mass damper spring system*) dengan diagram *free-body*nya yang bergerak translasi seperti yang digambarkan dibawah ini:

$$\Sigma F(t) = ma(t) \quad (2.16)$$

$$K(x_i(t) - x_o(t)) - C \frac{dx_o(t)}{dt} = m \frac{dx_o(t)}{dt} \quad (2.17)$$

$$m \frac{d^2x_o(t)}{dt^2} + C \frac{dx_o(t)}{dt} + Kx_o(t) = Kx_i(t) \quad (2.18)$$

Adapun contoh persoalan gerak rotasi, dijelaskan sebagai berikut. Sebuah roda gila dengan momen inersia  $I$ , terletak pada bantalan yang



Gambar 2.6: Massa linier: percepatan translasi dan percepatan angular

menghasilkan momen gesekan sebesar  $C$  kali kecepatan angular poros  $\omega(t)$ . Persamaan yang berlaku:

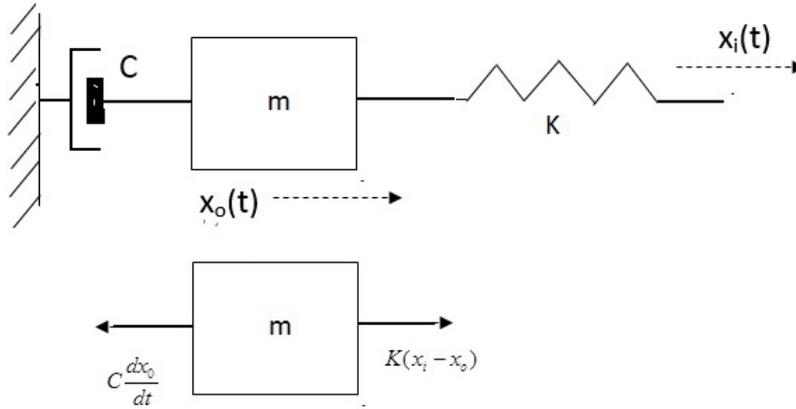
$$\Sigma M = I\alpha(t) \quad (2.19)$$

$$T(t) - C\omega(t) = I \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (2.20)$$

$$I \frac{d\omega(t)}{dt} + C\omega(t) = T(t) \quad (2.21)$$

## 2.4 Sistem Thermal Dasar

Model persamaan sistem thermal dapat dianalogikan dengan sistem elektrik, yakni memiliki karakteristik resistif dan kapasitif. Aliran



Gambar 2.7: Sistem massa-redaman-pegas dan diagram *free-body*nya

panas melalui proses konduksi diturunkan dari hukum Fourier

$$Q_T = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)}{l} \quad (2.22)$$

dimana  $Q_T$  adalah aliran panas dalam Watt,  $K$  konduktifitas thermal dalam Watt/meter Kelvin,  $(\theta_1 - \theta_2)$  merupakan selisih temperatur dalam Kelvin,  $A$  adalah area tegak lurus aliran panas dalam  $meter^2$  dan  $l$  adalah ketebalan konduktor dalam meter.

Adapun selisih temperatur menurut hukum Ohm merupakan perkalian resistansi thermal dengan aliran panas

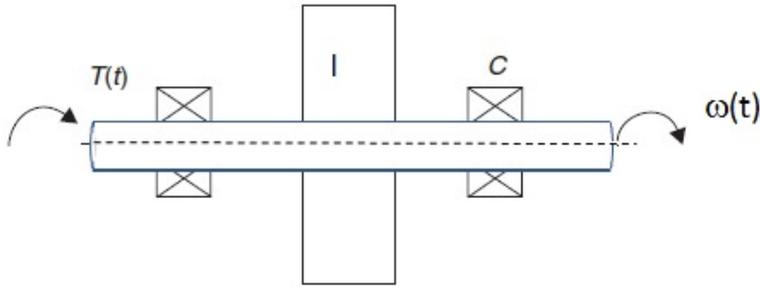
$$(\theta_1 - \theta_2) = Q_T R_T \quad (2.23)$$

dengan resistansi thermal

$$R_T = \frac{l}{KA} \quad (2.24)$$

Panas yang tersimpan dirumuskan

$$H_T(t) = mC_P\theta(t) \quad (2.25)$$



Gambar 2.8: Roda gila pada bantalan

dimana  $H_T$  adalah panas tersimpan (Joule),  $m$  adalah massa dalam kg,  $C_P$  adalah panas tertentu untuk tekanan konstan dan  $\theta$  merupakan perubahan temperatur dalam Kelvin.

Jika persamaan diatas dibandingkan dengan elektrostatis

$$Q(t) = Cv(t) \quad (2.26)$$

maka diperoleh kapasitansi thermal

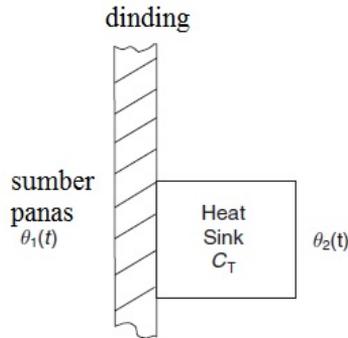
$$C_T = mC_P \quad (2.27)$$

Turunan panas tersimpan  $H_T$  merupakan aliran panas  $Q_T$

$$\frac{dH_T(t)}{dt} = mC_P \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.28)$$

$$Q_T = C_T \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.29)$$

Untuk contoh pemodelan pada sistem thermal, sebuah sumber panas dengan temperatur  $\theta_1$  mengalirkan panas melalui sebuah dinding dengan resistansi ideal  $R_T$  menuju pendingin (*heat sink*) dengan kapasitansi thermal idela  $C_T$  dan temperatur  $\theta_2$ . Tentukan persamaan



Gambar 2.9: Sistem perpindahan panas

selisih temperatur ( $\theta_1 - \theta_2$ )  
 Pada dinding, berlaku

$$Q_T(t) = \frac{(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{R_T} \quad (2.30)$$

Pada *heat sink*, berlaku:

$$Q_T(t) = C_T \frac{d\theta_2(t)}{dt} \quad (2.31)$$

Dengan demikian

$$\frac{(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{R_T} = C_T \frac{d\theta_2(t)}{dt} \quad (2.32)$$

$$R_T C_T \frac{d\theta_2}{dt} + \theta_2 = \theta_1 \quad (2.33)$$

## 2.5 Transformasi Laplace

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier, transformasi Laplace dapat digunakan. Banyak fungsi dasar seperti fungsi sinusoida, eksponensial, sinusoida teredam dan sebagainya yang dapat diubah dalam bentuk peubah kompleks  $s$ , termasuk operator integral dan diferensial yang juga dapat diubah dalam operasi aljabar dalam bidang

kompleks. Dengan transformasi Laplace, kita dapat memperkirakan performansi sistem seperti respon keadaan mantap (*steady state*) maupun *transient* tanpa perlu menyelesaikan persamaan diferensialnya.

Sebelumnya, perlu kita definisikan pengertian peubah kompleks  $s$  yang memiliki bagian riil dan imajiner berikut:

$$s = \sigma + j\omega \quad (2.34)$$

Sedangkan fungsi kompleks memiliki bentuk berikut:

$$G(s) = G_x + jG_y \quad (2.35)$$

dimana magnitudo atau besar  $G(s) = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$  dan sudut fasa fungsi kompleks tersebut  $\theta = \tan^{-1} \frac{G_y}{G_x}$ . Kemudian *complex conjugate*-nya  $G^*(s) = G_x - jG_y$ .

Transformasi Laplace suatu fungsi domain waktu  $f(t)$  dengan  $f(t) = 0$  untuk  $t < 0$  dituliskan dalam persamaan dibawah ini

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.36)$$

Sedangkan invers transformasi Laplace, didefinisikan

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{-st} ds, t > 0 \quad (2.37)$$

Beberapa contoh berikut, transformasi Laplace untuk fungsi yang umum dijumpai

1. Unit step,  $f(t) = 0$ , untuk  $t < 0$  dan  $f(t) = A$ , untuk  $t > 0$  maka

$$\mathcal{L}(A) = F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (2.38)$$

2. Eksponensial,  $f(t) = 0$ , untuk  $t < 0$  dan  $f(t) = Ae^{-at}$ , untuk  $t > 0$  maka

$$\mathcal{L}(Ae^{-at}) = F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = A \frac{1}{s+a} \quad (2.39)$$

3. Ramp,  $f(t) = 0$ , untuk  $t < 0$  dan  $f(t) = At$ , untuk  $t > 0$  maka

$$\mathcal{L}(At) = F(s) = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \quad (2.40)$$

4. Sinusoidal,  $f(t) = 0$ , untuk  $t < 0$  dan  $f(t) = A \sin \omega t$ , untuk  $t \geq 0$  maka kita dapat memanfaatkan persamaan Euler berikut

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (2.41)$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}(A \sin \omega t) = F(s) = \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) dt \quad (2.43)$$

$$= \frac{A}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.44)$$

Dengan cara yang sama, untuk  $f(t) = A \cos \omega t$ , diperoleh

$$\mathcal{L}(A \cos \omega t) = \frac{As}{s^2 + \omega^2} \quad (2.45)$$

Tabel 2.1 berikut merangkum transformasi Laplace dan inversnya untuk beberapa fungsi umum lainnya

Transformasi Laplace untuk persamaan diferensial, dirumuskan berikut ini:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)'}(0) \quad (2.46)$$

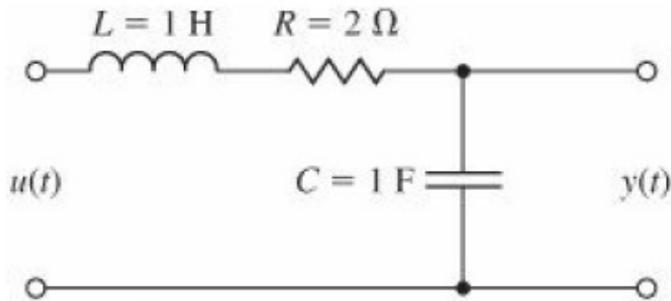
Adapun transformasi Laplace untuk fungsi integral dirumuskan berikut:

$$\mathcal{L}\left(\int f(t) dt\right) = \frac{F(s)}{s} \quad (2.47)$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad (0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

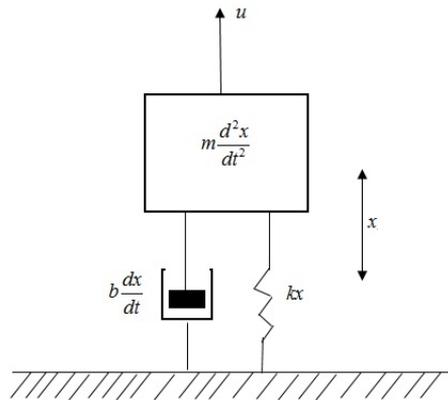
Tabel 2.1: Transformasi Laplace



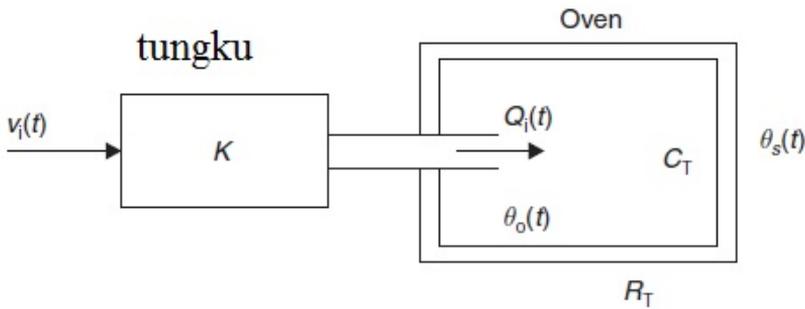
Gambar 2.10: Rangkaian RLC

## 2.6 Soal Latihan

1. Pada rangkaian elektrik (Gambar 2.10) berikut ini.
  - (a) Tentukan persamaan differensial yang merepresentasikan relasi masukan-keluaran.
  - (b) Tentukan pula fungsi alih  $\frac{Y(s)}{U(s)}$  dengan memanfaatkan transformasi Laplace dan fungsi keluaran dalam domain waktu kontinyu.
2. Untuk relasi masukan keluaran pada sistem massa-redaman-pegas (Gambar 2.11) berikut,
  - (a) Tentukan persamaan differensialnya jika  $m, k, c$  masing-masing adalah massa, konstanta pegas dan konstanta redaman,  $u, x$  adalah gaya yang bekerja dan posisi sistem.
  - (b) Tentukan pula fungsi alih dengan memanfaatkan transformasi Laplace dan fungsi keluaran dalam domain waktu kontinyu.
3. Sebuah oven penggoreng dipanaskan dengan tungku secara elektrik (Gambar 2.12).



Gambar 2.11: Sistem mekanik

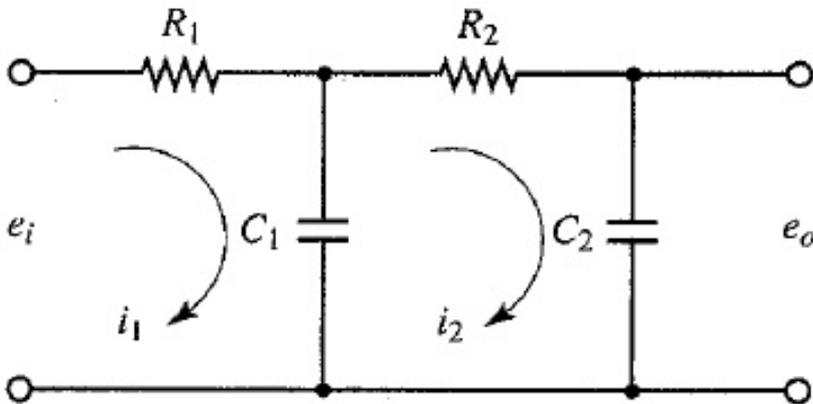


Gambar 2.12: Sistem perpindahan panas, tungku dan oven

Parameter yang diketahui adalah  $v_1$  adalah tegangan pengoperasian tungku,  $Q_i$ ,  $\theta_o$ ,  $\theta_s$  masing-masing adalah panas masukan, temperatur oven dan temperatur sekitar. Adapun  $K$ ,  $R_T$ ,  $C_T$  masing-masing adalah konstanta tungku, resistansi thermal dan kapasitansi thermal.

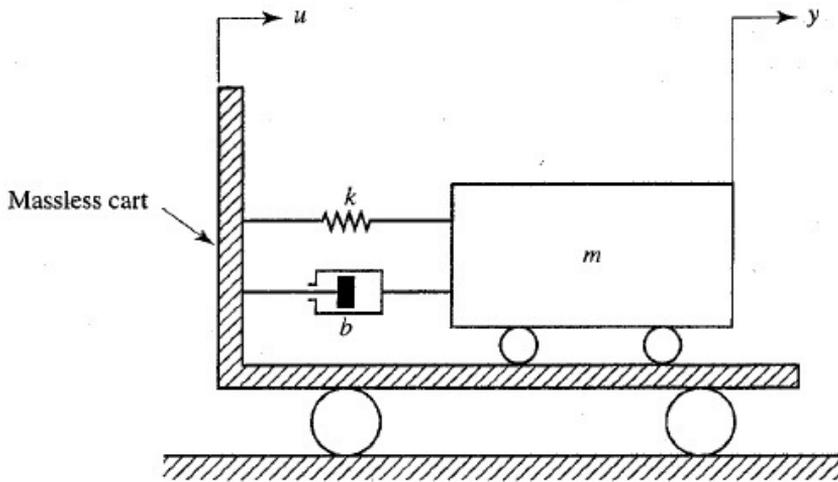
- Tentukan persamaan differensial yang merepresentasikan selisih temperatur pada sistem ini.
- Tentukan pula fungsi alihnya dengan memanfaatkan transformasi Laplace dan fungsi keluaran dalam domain waktu kontinyu.

4. Suatu rangkaian elektrik (Gambar 2.13) dibawah ini:



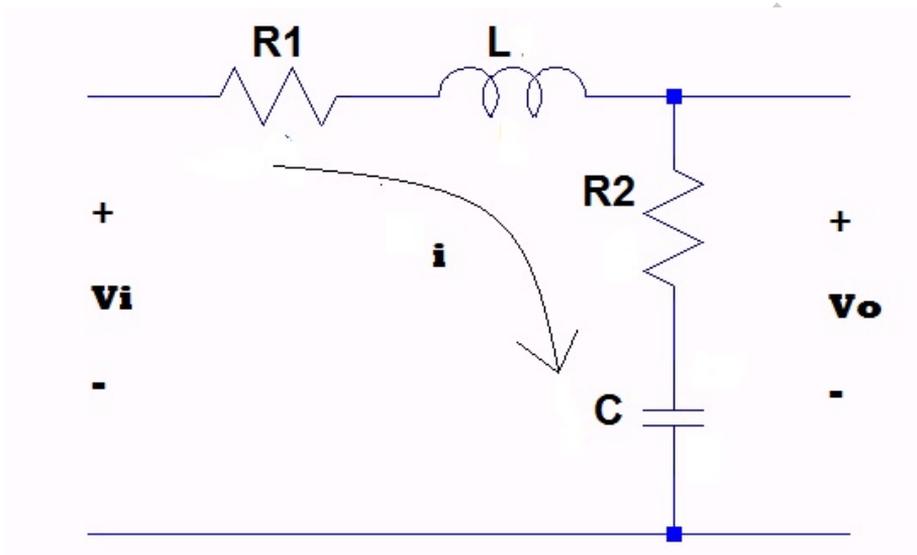
Gambar 2.13: Rangkaian elektrik

- (a) Carilah persamaan diferensial yang merepresentasikan model fisik rangkaian diatas.
  - (b) Tentukan pula fungsi alihnya dengan memanfaatkan transformasi Laplace dan fungsi keluaran dalam domain waktu kontinyu.
5. Suatu sistem mekanik (Gambar 2.14) dibawah ini:
- (a) Carilah persamaan diferensial yang merepresentasikan model fisik rangkaian tersebut.
  - (b) Bagaimanakah persamaan fungsi alih yang merepresentasikan relasi masukan keluaran dalam domain  $s$  (Laplace) dan fungsi keluaran dalam domain waktu kontinyu.
6. Sebuah rangkaian elektrik (Gambar 2.15) dibawah ini,
- (a) Tulislah persamaan tegangan masukan dan keluarannya
  - (b) Susunlah persamaan ruang keadaannya (*state space*) dengan mendefinisikan peubah keadaan  $x_1 = \int i dt, x_2 = \dot{x}_1$



Gambar 2.14: Sistem mekanik

- (c) Dengan transformasi Laplace, tentukan fungsi alihnya
- (d) Realisasikan dengan komputer analog yang memuat integrator



Gambar 2.15: Sistem RLC

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

---

### Ruang Keadaan (*StateSpace*)

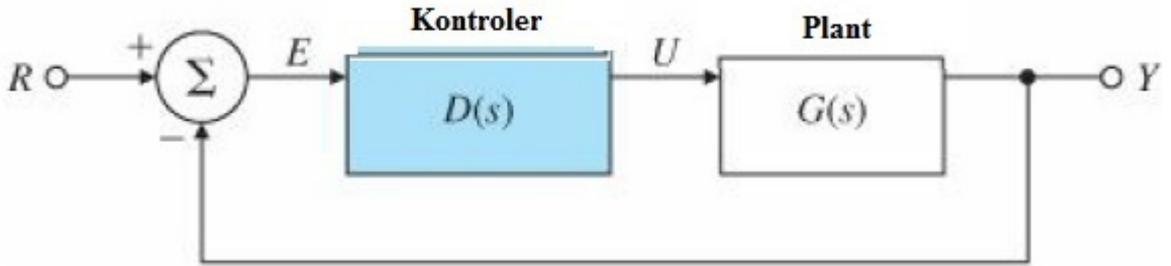
---

#### 3.1 Gambaran Umum

Penjelasan mengenai metode peubah keadaan (*state variable*) seringkali diturunkan berdasarkan persamaan differensial. Pada desain ruang keadaan (*state space*), seorang insinyur kendali akan merancang suatu kompensator dinamis, biasa juga disebut dengan kontroler atau pengendali secara langsung berdasarkan deskripsi peubah keadaan dari sebuah sistem yang dimaksud. Kontroler atau pengendali tersebut dapat dilihat pada gambar 3.1, yakni blok  $D(s)$  yang memenuhi spesifikasi desain yang diinginkan. Karena kemudahan dan kesesuaiannya dengan perhitungan menggunakan komputer, sampai saat ini metode ruang keadaan banyak dipelajari dan digunakan oleh para insinyur kendali.

#### 3.2 Keunggulan metode Ruang Keadaan

Telah disebutkan sebelumnya, bahwa ide dari metode ruang keadaan ini bermula dari persamaan diferensial, yang mengacu pada dinamika sebuah sistem yang akan dikendalikan. Kemudian, persamaan diferensial



Gambar 3.1: Blok Diagram Sistem Kendali

sia (*ordinary differential equations, ODE*) ini dapat dimanipulasi dan diubah kedalam bentuk persamaan ruang keadaan. Keunggulan metode ruang keadaan, diantaranya:

- Dibandingkan dengan persamaan diferensial untuk menggambarkan dinamika sistem, metode ruang keadaan dapat lebih mudah mengakomodir sistem dengan masukan jamak keluaran jamak (*multi input – multi output, MIMO*)
- Mengenalkan ide geometri ke dalam persamaan differensial. Pada ilmu fisika, posisi dan kecepatan suatu partikel dapat dijelaskan melalui bidang fasa (*phase plane*) dan trayektori gerakan partikel tersebut dapat digambarkan sebagai suatu kurva pada bidang fasa ini. Kesulitannya, jika diinginkan trayektori lebih dari dua dimensi, maka kurva tidak bisa digambarkan. Konsep jarak, ortogonal dan garis-garis paralel dapat dijelaskan melalui visualisasi ODE (*ordinary differential equation*) dalam ruang keadaan.
- Berbeda dengan relasi masukan keluaran pada fungsi alih atau *transfer function*, ruang keadaan dapat menggambarkan perilaku internal dari sebuah sistem. Sementara fungsi alih hanya berkaitan dengan masukan dan keluaran sistem. Padahal, keadaan dari sistem dinamik seringkali menjelaskan distribusi energi dalam sebuah sistem. Posisi (energi potensial), kecepatan-

an (energi kinetik), tegangan kapasitor (energi listrik), arus induktor (energi magnetik) merupakan beberapa contoh peubah keadaan yang biasa digunakan untuk menggambarkan dinamika sistem.

### 3.3 Deskripsi Sistem

Umumnya, analisa ruang keadaan pada pemodelan sistem dinamik melibatkan tiga tipe peubah yakni peubah masukan, peubah keluaran dan peubah keadaan. Asumsikan suatu sistem *Multi Input Multi Output* (MIMO) dengan  $n$  integrator,  $r$  masukan  $u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots, u_r(t)$  dan  $m$  keluaran  $y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_m(t)$ .

Adapun peubah keadaan (*state variables*) merupakan  $n$  keluaran integrator  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$  berikut ini:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sedangkan peubah keluaran (*outputs*) sebanyak  $m$  berikut ini:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dengan mendefinisikan:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan umum ruang keadaan:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (3.3)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (3.4)$$

Linierisasi disekitar titik operasi menghasilkan:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (3.6)$$

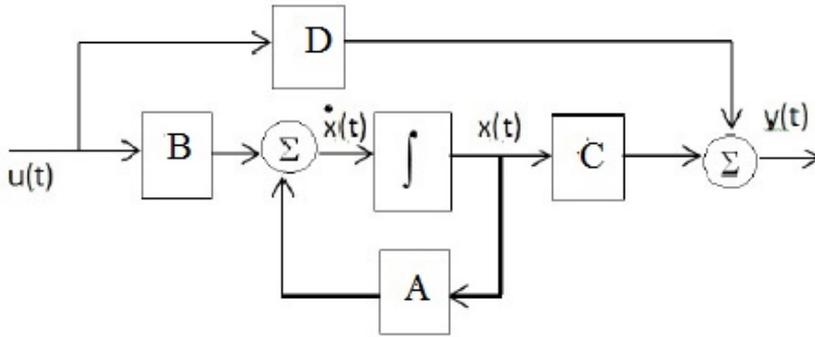
Matrik  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  masing-masing merupakan matrik keadaan, masukan, keluaran dan transmisi. Struktur relasi masukan keluaran untuk bentuk ruang keadaan digambarkan berikut ini

Rangkaian *RLC* pada gambar 2.3 memiliki pers. (2.9) yang kita tuliskan lagi berikut:

$$LC \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = v_1(t)$$

Dengan mendefinisikan

$$\begin{aligned} x_1 &= v_2(t) \\ \dot{v}_2(t) &= \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{v}_2(t) = \frac{R}{L} \dot{v}_2(t) - \frac{1}{LC} v_2(t) + \frac{1}{LC} v_1(t), \quad v_1(t) = u(t) \end{aligned}$$



Gambar 3.2: Struktur Ruang Keadaan

maka persamaan ruang keadaan dengan nilai matriks keadaan  $A$ , matriks masukan  $B$ , matriks keluaran  $C$  dan matriks transmisi  $D$  yang bersesuaian dengan pers. (3.5) dan (3.6), diperoleh berikut ini:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.4 Relasi Antara Ruang Keadaan dan Fungsi Alih

Fungsi alih sistem satu masukan satu keluaran (*single input – single output, SISO*) dapat dirumuskan:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.9)$$

Dari persamaan ruang keadaan, pers. (3.5) dan (3.6), dapat ditentukan transformasi *Laplace* sebagai berikut

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (3.10)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (3.11)$$

Dengan memberikan  $x(0) = 0$ ,

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \quad (3.12)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (3.13)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

Sustitusi (3.15) ke (3.11) menghasilkan:

$$Y(s) = [G(s)]U(s) \quad (3.16)$$

dimana

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.17)$$

### 3.5 Diagram Blok dan Ruang Keadaan

Untuk memahami keadaan peubah (*variable states*), penggambaran blok diagram yang dapat direalisasikan dengan komputer analog yakni dengan memanfaatkan integrator, diferensiator dan penguat analog. Perhatikan sistem diferensial relasi masukan keluaran orde dua ini

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 2u \quad (3.18)$$

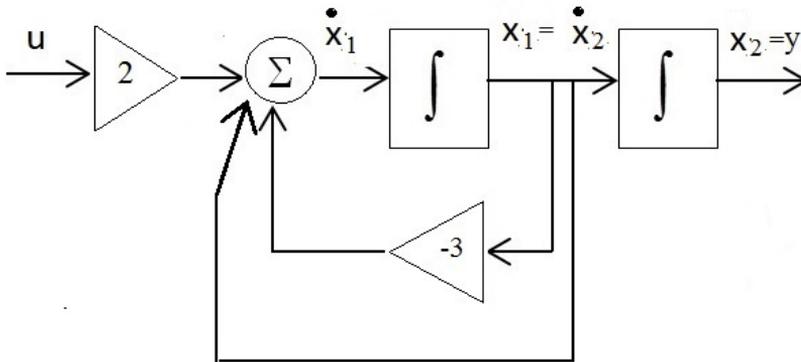
Dengan mendefinisikan  $\dot{y} = x_1, y = x_2$  maka

$$\dot{x}_1 = -4x_1 - 3x_2 + 2u \quad (3.19)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (3.20)$$

Persamaan (3.19)-(3.20) dan diagram blok pada gambar 3.3 diatas merepresentasikan persamaan ruang keadaan dengan :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [ 0 \quad 1 ], D = 0$$



Gambar 3.3: Diagram Blok Sistem Differensial Relasi Masukan-Keluaran

Adapun fungsi alih sistem dapat diketahui dari pers. (3.17) dengan memanfaatkan kode Matlab berikut:

$$A = [-4 \ -3; 10]; B = [2; 0]; C = [01]; D = 0;$$

$$[num, den] = ss2tf(A, B, C, D)$$

$$Gs = tf(num, den)$$

$$\text{yakni } G(s) = \frac{2}{s^2+43s+3}$$

### 3.6 Bentuk Kanonik Ruang Keadaan

Pertimbangkanlah suatu persamaan diferensial pada relasi masukan-keluaran berikut ini:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt}y(t) + a_n y(t) = \\ b_0 \frac{d^n}{dt^n}u(t) + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t) + \dots + b_{n-1} \frac{d}{dt}u(t) + b_n u(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fungsi alih pers. (3.21) diatas dapat dituliskan:

$$\frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.22)$$

Penulisan persamaan differensial untuk relasi masukan-keluaran diatas menjadi bentuk ruang keadaan memiliki bentuk kanonik terkendali (*controllable*), bentuk kanonik teramati (*observable*), kanonik diagonal dan kanonik Jordan.

### 3.6.1 Bentuk Kanonik Terkendali (*Controllable canonical form*)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Bentuk kanonik terkendali ini sangat penting bagi desain kendali metode penempatan kutub (*pole placement*)

### 3.6.2 Bentuk Kanonik Teramati (*Observable canonical form*)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (3.24)$$

### 3.6.3 Bentuk Kanonik Diagonal (*Diagonal canonical form*)

Fungsi alih juga dapat dituliskan berdasarkan akar-akar karakteristiknya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Bentuk kanonik diagonal dari pers.(3.25) diatas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.6.4 Bentuk Kanonik Jordan (*Jordan canonical form*)

Suatu fungsi alih dengan beberapa akar karakteristik identik, misalnya  $p_1 = p_2 = p_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4)(s + p_5) \dots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \dots + \\ &\quad \frac{c_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ruang keadaan kanonik Jordan memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

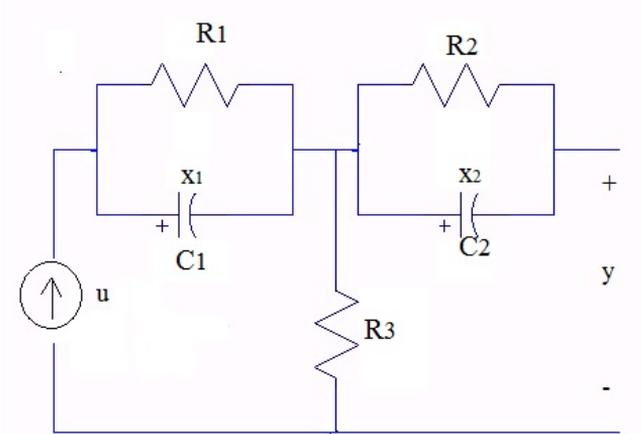
$$y = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (3.28)$$

### 3.7 Keterkendalian (*Controllability*) dan Keteramatan (*Observability*)

Keterkendalian dan keteramatan sebuah sistem memegang peranan penting pada desain kendali dengan ruang keadaan, karena boleh jadi kedua kriteria ini menentukan solusi lengkap bagi permasalahan desain sistem kendali. Solusi desain kendali mungkin tidak ada untuk sebuah sistem yang tak terkendalikan (*uncontrollable*).

Sebuah sistem dikatakan dapat dikendalikan (*controllable*) pada saat  $t_0$  jika dengan vektor kendali yang tidak dibatasi sistem dapat diubah dari kondisi awal  $x(t_0)$  menuju kondisi yang lain dengan interval waktu tertentu (*finite*). Adapun sistem dikatakan dapat teramatan (*observable*) pada saat  $t_0$  jika kondisi  $x(t_0)$  diketahui dari observasi keluaran selama interval waktu tertentu.

Untuk memahami pengertian keterkendalian dan keteramatan, dapat dilihat pada rangkaian listrik pada Gambar 3.4. Masukan sistem merupakan arus  $u$  dan keluaran adalah tegangan  $y$ . Karena  $y$  terbuka (*open circuit*) maka masukan  $u$  tidak berpengaruh apapun pada tegangan  $x_2$ , artinya masukan tidak dapat mengendalikan tegangan  $x_2$ . Kemudian arus yang mengalir pada  $R_3$  akan senantiasa sama dengan sumber arus  $u$  dan tidak akan muncul di  $y$ , artinya arus  $u$  tersebut



Gambar 3.4: Rangkaian Listrik

tidak dapat diamati oleh keluaran  $y$ . Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa rangkaian ini tidak dapat dikendalikan (*uncontrollable*) dan tidak dapat teramati (*unobservable*)

### 3.7.1 Keterkendalian (*Controllability*)

Sebuah sistem waktu kontinyu dalam ruang keadaan

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.29)$$

Solusi pers. (3.29) diatas adalah

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.30)$$

Untuk interval waktu  $t_0 \leq t \leq t_1$  dan kondisi akhir adalah titik asal ruang keadaan, maka

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.31)$$

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (3.32)$$

Memanfaatkan interpolasi Silvester, diperoleh:

$$e^{At_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (3.33)$$

Sustitusi (3.33) ke (3.32) akan mendapatkan:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.34)$$

Dengan mendefinisikan

$$\int_0^{t_1} \alpha_k u(\tau) d\tau = \beta_k,$$

didapatkan berikut ini

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \\ &= - \left[ B \quad \vdots \quad AB \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad A^{n-1} B \right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_1 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Matrik berukuran  $n \times n$

$$\left[ B \quad \vdots \quad AB \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad A^{n-1} B \right]$$

pada persamaan (3.35) diatas merupakan matrik keterkendalian (*controllability matrix*) dan sistem dapat dikendalikan (*controllable*) jika dan hanya jika matrik tersebut memiliki  $rank = n$ , dimana  $n$  merupakan ukuran orde sistem.

Kondisi keterkendalian secara lengkap atau komplit dipenuhi jika tidak ada pembatalan (*cancellation*) pada fungsi alih atau matrik alih dalam fasa  $s$ . Lebih jelasnya, fungsi alih sistem berikut:

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

merupakan sistem dengan kondisi keterkendalian yang tidak komplit karena ada pembatalan  $(s+1)$  yang saling menghilangkan di numerator dan denominator, sehingga satu derajat kebebasannya hilang.

Secara praktik, mengendalikan keluaran (*output*) lebih realistis dibandingkan dengan mengendalikan keadaan (*state*) sistem sehingga memunculkan kriteria keterkendalian keluaran. Pertimbangkan sistem berikut

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.36)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.37)$$

dengan matrik  $A, B, C, D$  masing-masing berukuran  $n \times n, n \times r, m \times n, m \times r$ .

Sebuah sistem dikatakan dapat dikendalikan keluaran (*controllable output*) jika dengan vektor kendali  $u(t)$  yang tidak dibatasi (*unconstrained*), keluaran dapat diubah dari kondisi awal  $y(t_0)$  menuju kondisi sembarang lainnya  $y(t_1)$  dengan interval waktu  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Keluaran sistem dikatakan dapat dikendalikan komplit, jika dan hanya jika matrik berukuran  $m \times (n+1)r$  berikut

$$\left[ CB \quad : \quad CAB \quad : \quad CA^2B \quad \dots \quad : \quad CA^{n-1}B \quad D \right]$$

merupakan matrik keterkendalian keluaran (*output controllability matrix*) dengan  $rank = m$ .

### 3.7.2 Keteramatan (*Observability*)

Keteramatan sangat penting dalam menyelesaikan permasalahan keadaan yang tidak dapat terukur secara langsung seperti pada permasalahan umpan balik keadaan (*state feedback*).

Pertimbangkan suatu sistem otonomus, tanpa masukan aksi kendali

$$\dot{x} = Ax \quad (3.38)$$

$$y = Cx \quad (3.39)$$

dengan matrik  $A, C$  masing-masing berukuran  $n \times n$  dan  $m \times n$ . Sistem dikatakan dapat teramati (*observable*) jika setiap keadaan  $x(t_0)$  dapat diketahui dari pengamatan keluaran  $y(t)$  dalam interval waktu  $t_0 \leq$

$t \leq t_1$ . Peniadaan  $u(t)$  dikarenakan jika disertakan maka solusinya menjadi

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\y(t) &= Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du\end{aligned}$$

Sedangkan matrik  $A, B, C, D$  dan juga  $u(t)$  diketahui sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Mengacu pada persamaan sebelumnya:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

maka didapatkan:

$$\begin{aligned}y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0) \\y(t) &= \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0)\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa matrik

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

merupakan matrik keteramatan (*observability matrix*) dan sistem dapat teramati (*observable*) jika dan hanya jika matrik tersebut memiliki  $rank = n$ .

Seperti keterkendalian, kondisi keteramatan komplit dipenuhi jika tidak ada pembatalan (*cancellation*) pada fungsi alih atau matrik alih dalam fasa  $s$ .

### 3.8 Soal Latihan

1. Suatu fungsi alih

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$$

Tentukan persamaan ruang keadaan dalam bentuk

- (a) kanonik terkendali
  - (b) kanonik teramati, dan
  - (c) kanonik diagonal.
2. Dua fungsi alih berikut ini, yakni

- (a)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 5}{(s + 1)^2(s + 2)(s + 3)}$$

- (b)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

Tentukan bentuk ruang keadaan kedua fungsi alih diatas dalam bentuk kanonik Jordan.

3. Suatu sistem dengan parameter ruang keadaan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [4 \ 5 \ 1]$$

Periksalah keterkendalian dan keteramatannya. Ubahlah ke fungsi alih untuk memeriksa apakah ada pembatalan (*cancellation*) *zero* dan *pole*.

4. Untuk soal no 1 dan 2 diatas, buatlah diagram blok untuk masing-masing fungsi alih dengan integrator untuk masing-masing keadaan (*state*)

5. Untuk rangkaian pada Gambar 2.10-2.15,
- (a) Realisasikan dengan komputer analog dan integrator untuk masing-masing keadaan (*state*)
  - (b) Simulasikan untuk mendapatkan respon unit step masing-masing sistem
6. Untuk gambar diagram blok dibawah ini, tentukan fungsi alihnya dan jika masukan  $u(t) = e^{-t}$ ,
- (a) Tentukanlah persamaan keluaran  $y(t)$ , dan
  - (b) Gambarkanlah sinyalnya

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

---

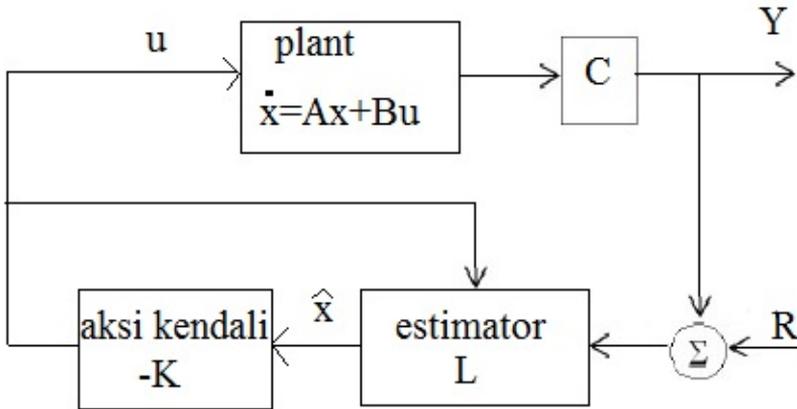
# Desain Kendali via Ruang Keadaan

---

## 4.1 Pendahuluan

Desain kendali pada suatu sistem meliputi dua langkah, yakni penentuan aksi kendali (*control action, control law*) dan penentuan estimator atau observer yang diperlukan jika keadaan (*states*) sistem tidak diketahui keseluruhan atau sebagian. Langkah selanjutnya adalah mengkombinasikan aksi kendali dan estimator tersebut.

Pembahasan ini akan menjelaskan struktur sistem kendali dengan kompensator yang merupakan kombinasi kendali (*controller*) dan estimator, pemilihan *poles* baik untuk desain kendali maupun estimator via dominasi *poles* orde dua dan kedudukan akar simetri (*symmetric root locus, SRL*)



Gambar 4.1: Struktur Kendali dan Estimator

## 4.2 Desain Aksi Kendali

Langkah pertama dalam merancang sistem kendali dengan ruang keadaan adalah menentukan aksi kendali (*control law*)

$$u = -Kx = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Substitusi aksi kendali (4.1) ke sistem ruang keadaan menghasilkan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x} &= (A - BK)x \end{aligned} \quad (4.2)$$

Persamaan karakteristik sistem lup tertutupnya:

$$\det(sI - (A - BK)) = 0 \quad (4.3)$$

Desain kendali menghasilkan kendali  $K$  yang menempatkan akar-akar pada persamaan (4.3) pada lokasi yang diinginkan. Persamaan karakteristik kendali yang diinginkan tersebut adalah

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0 \quad (4.4)$$

Persamaan (4.3) dan (4.4) adalah identik sehingga dapat digunakan untuk merancang desain kendali  $K$  berdasarkan lokasi *poles* yang diinginkan.

Sebagai contoh, tinjau sebuah sistem dengan frekuensi alami mengayun sebesar  $\omega_0$  memiliki persamaan ruang keadaan:

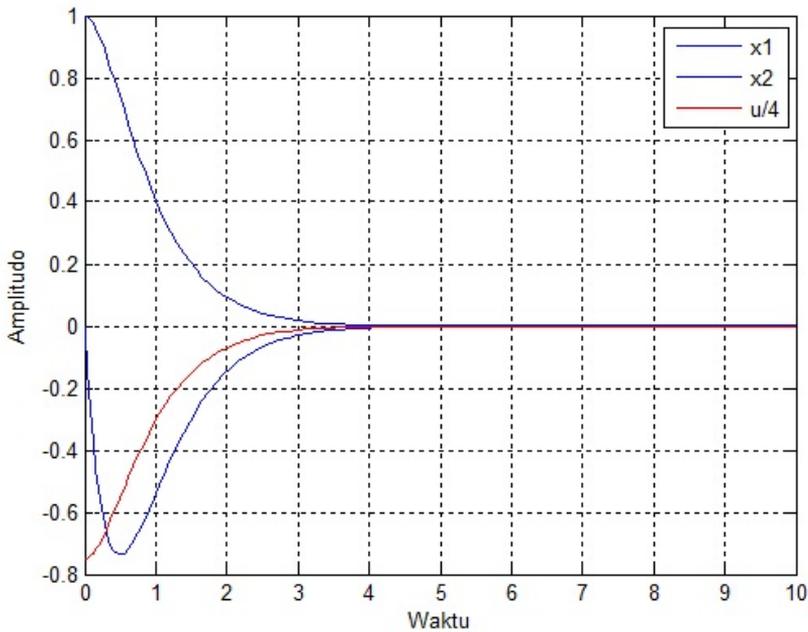
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.5)$$

Jika diinginkan frekuensi alamiahnya menjadi dua kali dan rasio redaman dari  $\zeta = 0$  menjadi  $\zeta = 1$ , yakni dengan menempatkan kedua *pole* lup tertutupnya di  $-2\omega_0$  maka desain kendali  $K$  diperoleh dari (4.3) dan (4.4) berikut

$$[sI - (A - BK)] = \alpha_c \quad (4.6)$$

$$s^2 + K_2s - \omega_0^2 - K_1 = s^2 + 4\omega_0s + 4\omega_0^2 \quad (4.7)$$

Dengan demikian,  $K = [K_1 \ K_2] = [-5\omega_0^2 \ 4\omega_0]$   
 Trayektori keadaan dengan kondisi awal  $x_1 = 1, x_2 = 0$  (silakan merujuk pada **mat4-1** pada Appendix A) dapat digambarkan dibawah ini:



Gambar 4.2: Trayektori keadaan (*states*) untuk  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \omega_0 = 1$

Metode lain yang cukup ringkas untuk merancang kendali adalah formulasi Ackermann yang dirumuskan:

$$K = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] C_o^{-1} \alpha_c(A) \quad (4.8)$$

dimana  $C_o$  adalah matrik keterkendalian  $[B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]$  dan

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_n I \quad (4.9)$$

Jika diinginkan persamaan karakteristiknya  $\alpha_c(s) = (s + 2\omega_0)^2$  maka koefisien yang diinginkan,  $\alpha_1 = 4\omega_0$  dan  $\alpha_2 = 4\omega_0^2$  dapat disubstitusikan ke (4.9) diatas berikut ini:

$$\begin{aligned} \alpha_c(A) &= \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} + 4\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + 4\omega_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5\omega_0^2 & -4\omega_0 \\ -4\omega_0^3 & 5\omega_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrik keterkendaliannya

$$C_0 = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$C_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh gain kendali

$$\begin{aligned} K &= [ K_1 \quad K_2 ] = [ 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\omega_0^2 & -4\omega_0 \\ -4\omega_0^3 & 5\omega_0^2 \end{bmatrix} \\ &= [ -5\omega_0^2 \quad 4\omega_0 ] \end{aligned}$$

yang sama dengan perhitungan sebelumnya.

#### 4.2.1 Kendali untuk sistem umpan balik keadaan penuh (*full order state feedback*) dengan masukan acuan (*reference input*)

Adanya masukan acuan  $r$  dengan mudah diikuti perubahan aksi kendali dari  $u = -Kx$  menjadi  $u = -Kx + r$ . Meskipun demikian, perlu dipertimbangkan munculnya kesalahan keadaan mantap (*non-zero steady state error*) pada masukan unit step. Untuk itu, perlu diperhitungkan nilai-nilai mantap dari keadaan (*state*) dan aksi kendali sehingga menghasilkan keluaran tanpa kesalahan (*zero output error*). Jika diinginkan nilai keadaan dan aksi kendali adalah  $x_{s-s}$  dan  $u_{s-s}$ , maka aksi kendali yang baru menjadi

$$u = u_{s-s} - K(x - x_{s-s}) \quad (4.10)$$

Artinya, tanpa kesalahan nilai  $x = x_{s-s}$  dan  $u = u_{s-s}$ .

Diinginkan kesalahan keadaan mantap (*steady-state error*) senantiasa nol untuk setiap masukan konstan, yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan sistem standar dibawah ini:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Pada kondisi mantap, persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$$0 = Ax_{s-s} + Bu_{s-s} \quad (4.11)$$

$$y_{s-s} = Cx_{s-s} + Du_{s-s} \quad (4.12)$$

Perhitungan gain untuk masukan acuan diselesaikan dengan menggunakan nilai  $y_{s-s} = r_{s-s}$  yang diperoleh dengan mendefinisikan  $x_{s-s} = N_x r_{s-s}$  dan  $x_{s-s} = N_u r_{s-s}$ . Selanjutnya akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x r_{s-s} \\ N_u r_{s-s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ r_{s-s} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Selanjutnya, dengan mudah diperoleh:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Maka aksi kendali untuk sistem dengan masukan acuan *unit step* dapat dituliskan

$$\begin{aligned} u &= N_u r - K(x - N_x r) \\ &= -Kx + (N_u + KN_x)r \\ &= -Kx + \bar{N}r \end{aligned} \quad (4.15)$$

Untuk lebih jelasnya, pertimbangkan sistem pendulum terbalik, dengan keluaran  $x_1$  memiliki matrik ruang keadaan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$$

Jika diinginkan kedua *poles* kendali terletak di  $s = -2$ , maka diperoleh  $K = [-5 \ 4]$ .

Substitusikan ke (4.13), akan didapat:

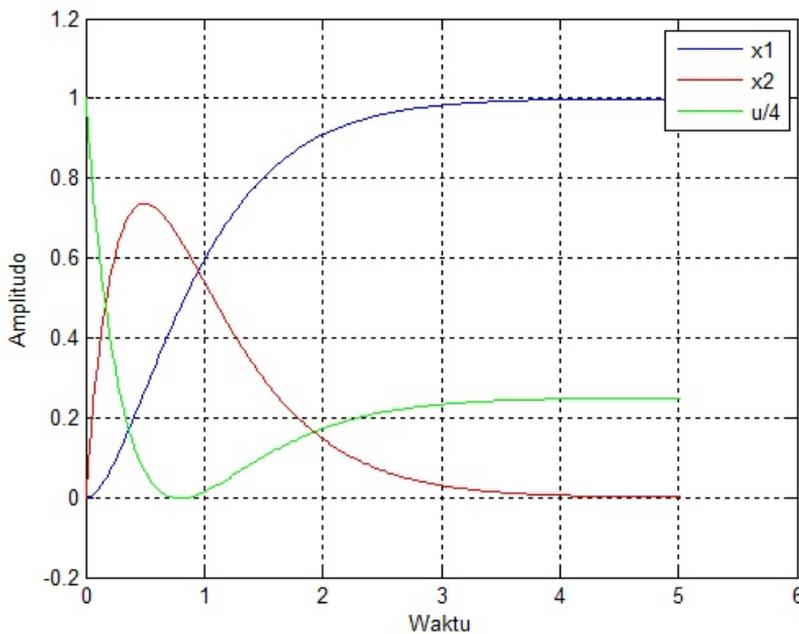
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Untuk mendapatkan  $\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$ , dapat diselesaikan dengan cara berikut:  
 Terlihat bahwa  $N_x = \begin{bmatrix} N_{x1} \\ N_{x2} \end{bmatrix}$ , sehingga

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{x1} \\ N_{x2} \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Dari persamaan (4.17) diatas, didapatkan  $N_{x2} = 0, -N_{x1} + N_u = 0, N_{x1} = 1$  atau  $N_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, N_u = 1$ .

Tanggapan unit step dapat digambarkan berikut (silakan merujuk pada **mat4-2, Appendix A**) dapat digambarkan dibawah ini:



Gambar 4.3: Tanggapan sistem terhadap masukan acuan unit step

## 4.2.2 Pemilihan Lokasi *Poles*

Pendekatan yang digunakan pada pemilihan lokasi *poles* dalam buku ini meliputi dua teknik, yakni dominasi *poles* orde dua dan kedudukan akar simetris. Teknik pertama digunakan untuk lebih mengutamakan upaya kendali, sedangkan teknik kedua yang seringkali disebut kendali optimal atau kedudukan akar simetri (*symmetric root locus*) berupaya menyeimbangkan antara tanggapan sistem yang baik dan upaya kendali (*control effort*).

### 4.2.2.1 Dominasi *Poles* orde dua

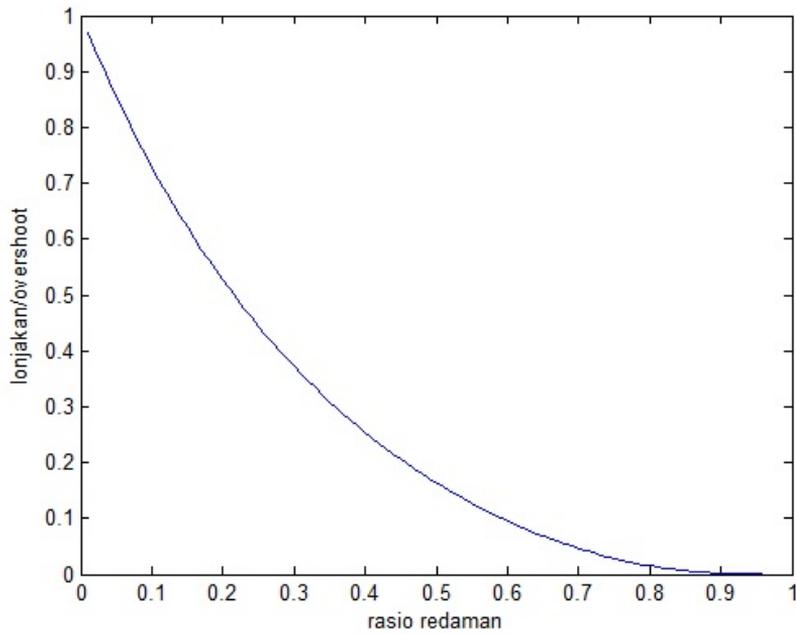
Pada sistem orde dua, lokasi *pole* dapat menggambarkan rasio peredaman  $\zeta$ , frekuensi alami  $\omega_n$  sistem yang selanjutnya dapat menentukan waktu naik (*rise time*)  $t_r$ , persentase lonjakan (*overshoot*)  $M_p$ , waktu penempatan (*settling time*)  $t_s$ . Relasi beberapa parameter sistem orde dua diatas sebagai berikut:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (4.18)$$

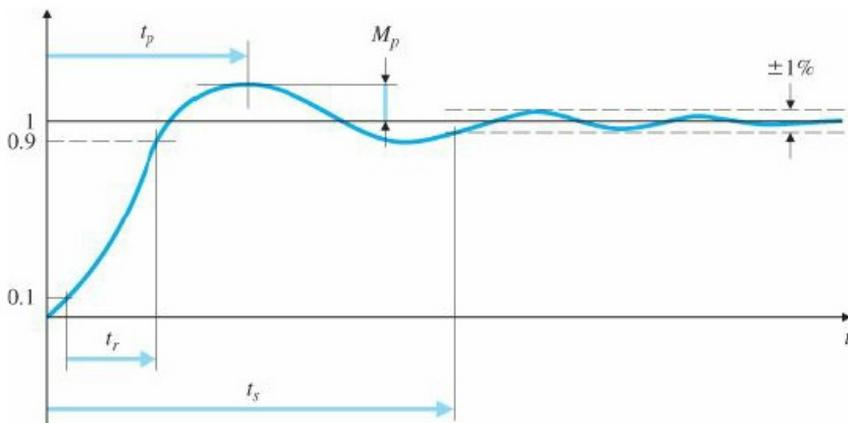
$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} \quad (4.19)$$

$$\zeta\omega_n \geq \frac{4.6}{t_s} \quad (4.20)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (4.21)$$



Gambar 4.4: Overshoot vs  $\zeta$



Gambar 4.5: Definisi beberapa parameter tanggapan sistem orde dua

*Poles* lup tertutup pada sistem dengan orde yang lebih tinggi dapat dipilih sebagai pasangan dominasi *poles* orde dua. Kemudian penyesuaian sisa *pole* yang dicari supaya bernilai bilangan nyata (riil) sehingga cukup teredam dan sistem secara keseluruhan memiliki perilaku tanggapan seperti sistem orde dua. Posisi *zeros* mesti dipastikan cukup jauh disebelah kiri bidang  $s$  untuk menghindari pengaruh perilaku sistem orde dua.

Sebagai ilustrasi, sebuah sistem dengan matriks ruang keadaan,

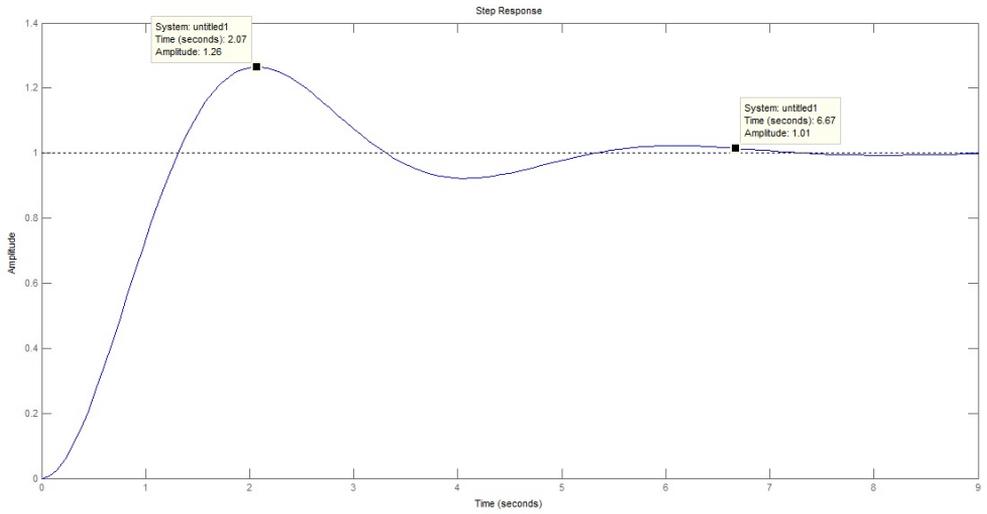
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = [1 \ 0 \ 0], D = 0$$

Jika sistem diinginkan memiliki prosentase *overshoot* tidak melebihi 5 % dan *time settling* tidak lebih dari 4.6 detik maka berdasarkan grafik pada gambar 4.4, diperoleh rasio redaman  $\zeta = 0.707$ .

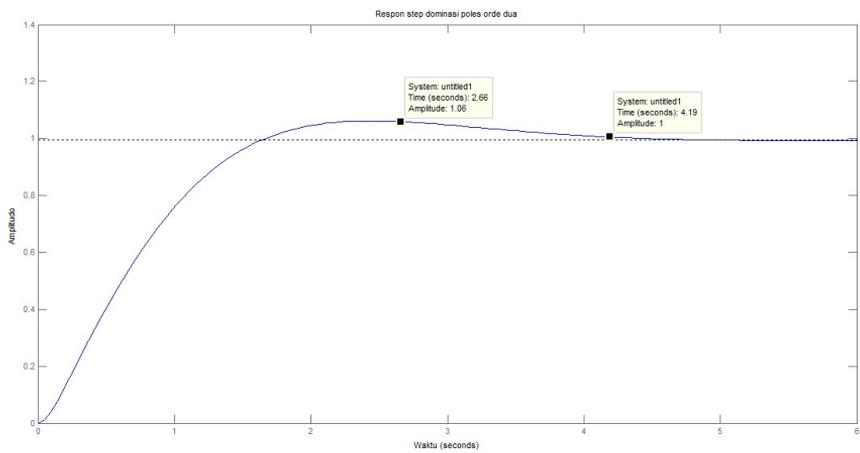
Perhatikan jika persamaan karakteristiknya menjadi

$$(s + \frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2})(s + \frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$$

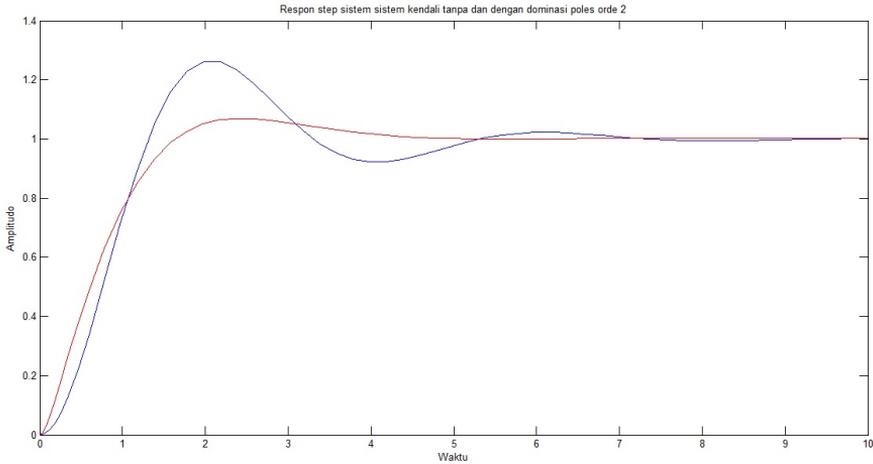
Disini dipilih frekuensi paling tidak ( $\frac{1}{0.707} = 1.4$ ) supaya memenuhi *time settling* 4.6 detik (perhatikan persamaan 4.18 dan 4.20). Jika *poles* yang dominan ditentukan  $-0.707 - j0.707$ ;  $-0.707 + j0.707$ , *pole* yang ketiga bisa dipilih di  $-10$  dengan faktor pengali setengah dari frekuensi natural  $\omega_n$  ( $\frac{1}{0.707}$ ). Respon step sistem awal dan respon sistem dengan desain kendali metode dominasi *poles* orde dua dapat dilihat pada gambar dibawah ini (Silakan mengacu pada Appendix A, **mat4-5**). Perhatikan bahwa *time settling* tercapai sebelum 4.6 detik dan prosentase overshoot 6 %. Adapun sistem awal memiliki overshoot 26 % dan *time settling* sekitar 6.7 detik



Gambar 4.6: Respon step sistem awal



Gambar 4.7: Respon step dominasi *poles* orde dua



Gambar 4.8: Pengaruh dominasi poles orde dua terhadap sistem

#### 4.2.2.2 Kedudukan akar simetri (*Symmetric Root Locus, SRL*)

Kendali *linear quadratic regulator, LQR* merupakan metode kendali optimal yang dikenal efektif, dengan meminimalkan fungsi biaya

$$J \equiv \int_0^{\infty} (\rho z^2(t) + u^2(t)) dt \quad (4.22)$$

pada sebuah sistem linier

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ z &= C_1 x(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

dimana  $\rho$  merupakan fungsi bobot dan aksi kendali yang dirancang

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.24)$$

Nilai  $K$  optimal diperoleh dengan menempatkan *pole - pole* lup tertutup pada akar-akar yang stabil persamaan SRL

$$1 + \rho G_0(-s)G_0(s) = 0 \quad (4.25)$$

dimana

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = C_1(sI - A)^{-1}B \quad (4.26)$$

Untuk contoh sistem orde satu, diketahui

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax(t) + u(t) \\ z &= x(t) \end{aligned}$$

maka dengan pers. (4.26) didapatkan

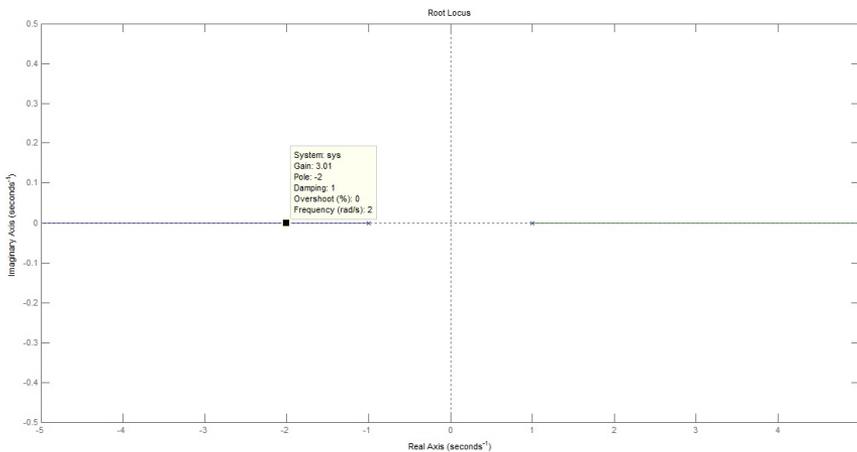
$$G_0(s) = \frac{1}{s + a}$$

Akar persamaan SRL (dari pers. (4.25)) diperoleh sebagai berikut

$$s = -\sqrt{a^2 + \rho}$$

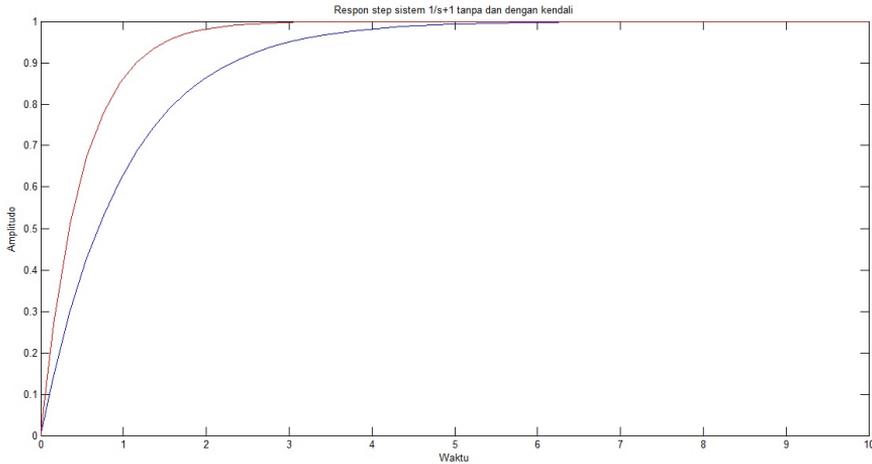
Dengan demikian, untuk nilai  $\rho$  yang berubah naik ( $\rho > 0$ ) maka lokasi akar lup tertutup yang meminimalkan fungsi biaya akan terletak disebelah kiri akar lup terbuka sistem  $G_0$ .

Sebagai contoh, tinjau sistem  $G = \frac{1}{s+1}$  maka dengan metode SRL diperoleh



Gambar 4.9: SRL untuk sistem  $G(s) = \frac{1}{s+1}$

Sistem memiliki rasio redaman  $\zeta = 1$  dan dengan memilih *pole*  $s = -2$  pada  $\rho = 3$  maka kendali dapat didesain dengan metode penempatan *pole* tersebut. Dengan demikian diperoleh  $A = -1, B = 1, C = 1, D = 0$ , sehingga  $K = 1$ . Respon kedua sistem dapat dilihat berikut ini:



Gambar 4.10: Respon step untuk sistem tanpa dan dengan kendali SRL

### 4.3 Desain Estimator

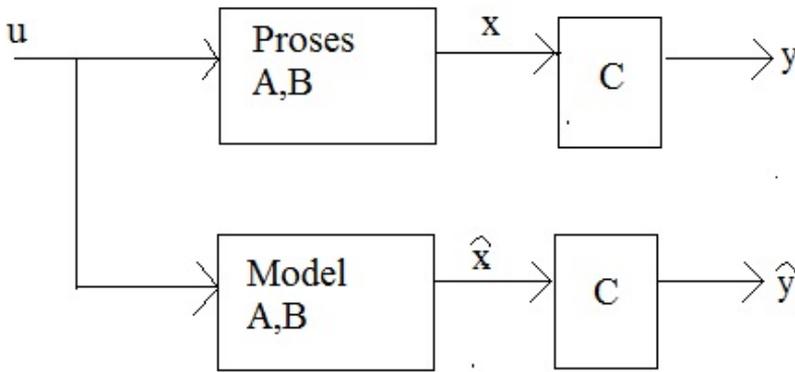
Pada banyak kasus, tidak semua keadaan *state* suatu sistem diketahui dengan mudah karena terkait dengan pengukuran yang sulit dan mahal, pengaruh perubahan sistem karena gangguan dan noise dan sebagainya. Untuk itu, desain pengamat *observer* atau *estimator* pada desain kendali dengan umpan balik keadaan (*state feedback*) sangat dibutuhkan untuk mengetahui *state* sistem dengan sedikit pengukuran misalnya. *State* yang diestimasi  $\hat{x}$  menghasilkan aksi kendali  $u = -K\hat{x} + r$

#### 4.3.1 Estimator Orde Penuh (*Full Order Estimator*)

Model ruang keadaan untuk estimator orde penuh dituliskan

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \quad (4.27)$$

Kondisi awal  $x(0)$  perlu diketahui dan digunakan sebagai nilai awal  $\hat{x}(0)$ . Estimator lup terbuka digambarkan berikut:



Gambar 4.11: Estimator lup terbuka

Error estimasi  $e$  didefinisikan sebagai selisih keadaan (*state*) sesungguhnya  $x$  dengan *state* estimasi  $\hat{x}$  berikut:

$$e = x - \hat{x} \quad (4.28)$$

Dinamika error estimasi menjadi

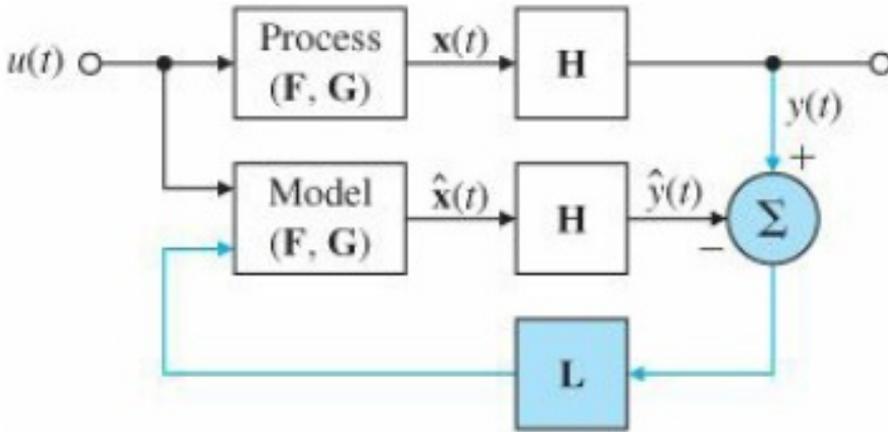
$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ae \quad (4.29)$$

Umpan balik merupakan solusi yang umum digunakan termasuk pada kasus desain estimator. Umpan balik pada selisih keluaran terukur dan keluaran estimasi dengan gain estimator  $L$ , dan koreksi model ruang keadaan, maka diperoleh persamaan

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (4.30)$$

dimana  $L = [ l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n ]^T$  sehingga dinamika error estimasinya menjadi

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (4.31)$$



Gambar 4.12: Desain estimator dengan umpan balik

Dengan demikian, diperoleh persamaan karakteristik error

$$\det[sI - (A - LC)] = 0 \quad (4.32)$$

dengan *pole - pole* estimator yang diinginkan

$$p_e = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \quad (4.33)$$

Sebagai contoh, pertimbangkan sebuah sistem dengan persamaan ruang keadaan

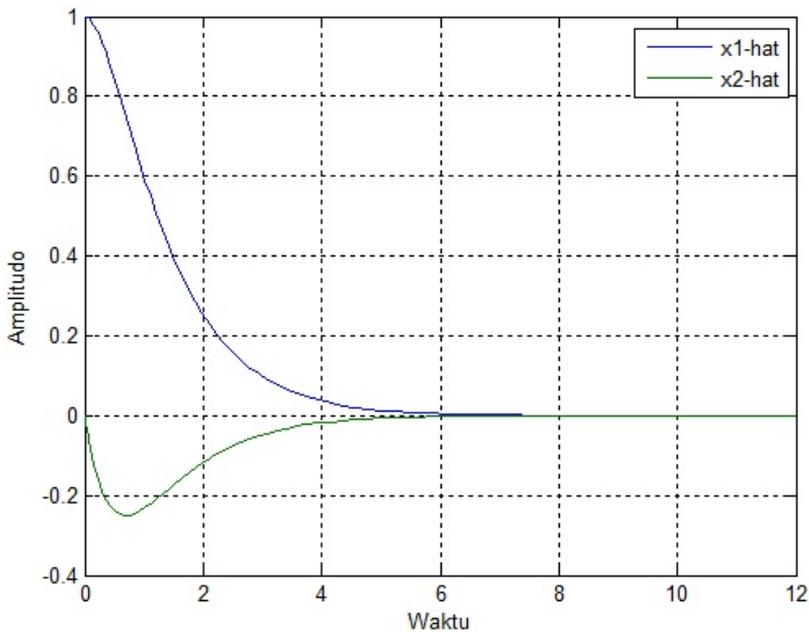
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; y = [ 0 \ 1 ] x$$

diinginkan memiliki 2 *pole* estimator pada -1 dan -2. Gain estimator yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}(s - p_1)(s - p_2) &= \det[sI - (A - LC)] \\ (s + 1)(s + 2) &= s^2 - sl_2 + 1 + l_1\end{aligned}$$

maka

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.13: Trayektori *state* estimasi  $\hat{x}_1$  dan  $\hat{x}_2$ , dengan  $\hat{x}(0) = [1 \ 0]^T$

### 4.3.2 Estimator Orde Terkurangi (*Reduced Order Estimator*)

Adanya *state* yang dapat diketahui langsung melalui pengukuran seperti *state* keluaran misalnya akan membantu mengurangi kerumitan desain estimator yang mana orde estimator menjadi berkurang. Tentu

saja, desain estimator orde penuh lebih baik digunakan untuk sistem dengan keluaran yang terkena gangguan (*noise*) untuk mengkompensasi dan mengestimasi *state* tak terukur akibat gangguan tersebut. Orde estimator dikurangi dari keluaran yang terukur, misal  $y = x_a$ . Sedangkan *state* sisanya didefinisikan sebagai  $x_b$  misalnya. Persamaan ruang keadaannya menjadi terdekomposisi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \quad (4.34)$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Dari persamaan diatas, diperoleh peubah keadaan tak terukuranya:

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + A_{ba}x_a + B_b u \quad (4.36)$$

dua suku terakhir merupakan masukan yang diketahui, dan dinamika *state* terukuranya:

$$\dot{x}_a = \dot{y} = A_{aa}y + A_{ab}x_b + B_a u \quad (4.37)$$

Kita bisa mengumpulkan pengukuran yang diketahui menjadi

$$\dot{y} - A_{aa}y - B_a u = A_{ab}x_b \quad (4.38)$$

Dari penjelasan diatas, dapat kita petakan transformasi peubah sebagai berikut:

$x \leftarrow x_b, A \leftarrow A_{bb}, Bu \leftarrow A_{ba}y + B_b u, y \leftarrow \dot{y} - A_{aa}y - B_a u, C \leftarrow A_{ab}$   
yang dapat disubstitusikan ke persamaan keadaan estimator orde penuh  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$  untuk mendapatkan persamaan keadaan orde terkurangi berikut

$$\dot{\hat{x}}_b = A_{bb}\hat{x}_b + A_{ba}y + B_b u + L(\dot{y} - A_{aa}y - B_a u - A_{ab}\hat{x}_b) \quad (4.39)$$

Dengan mendefinisikan error estimasi

$$e_b = x_b - \hat{x}_b \quad (4.40)$$

didapat turunan estimasi error

$$\dot{e}_b = \dot{x}_b - \dot{\hat{x}}_b \quad (4.41)$$

$$\dot{e}_b = (A_{bb} - LA_{ab})e_b \quad (4.42)$$

sehingga persamaan karakteristiknya

$$\det[sI - (A_{bb} - LA_{ab})] = 0 \quad (4.43)$$

Pada persamaan *state* estimator, munculnya peubah turunan keluaran  $\dot{y}$  tidak bisa diterima karena bisa jadi adanya noise yang akan menguat akibat diferensiasi. Oleh karena itu didefinisikan kendali baru

$$x_c = \hat{x}_b - Ly \quad (4.44)$$

Dengan demikian, bentuk baru estimator orde terkurangi diberikan berikut ini:

$$\dot{x}_c = (A_{bb} - LA_{ab})\hat{x}_b + (A_{ba} - LA_{aa})y + (B_b - LB_a)u \quad (4.45)$$

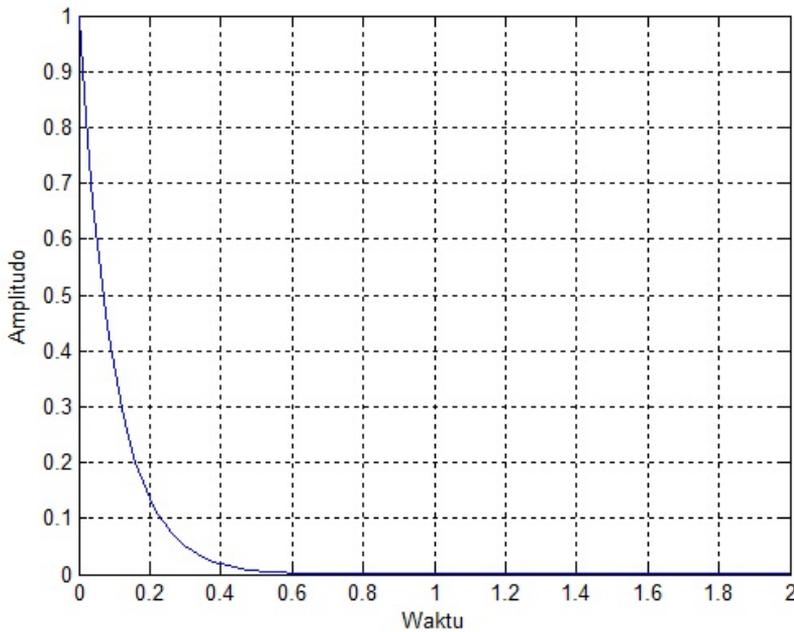
Contoh kasus. Suatu sistem dengan ruang keadaan

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; y = [1 \ 0] x$$

Diinginkan lokasi *pole* errornya di  $-10$ , maka desain estimator orde terkurangnya dapat menggunakan persamaan karakteristik dan kedudukan *pole* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det[sI - (A_{bb} - LA_{ab})] &= 0 \\ s + 10 &= 0 \end{aligned}$$

yang menghasilkan  $L = 10$ . Trayektori *state* estimasi  $\hat{x}_b$



Gambar 4.14: Trayektori *state* estimasi  $\hat{x}_b$

*State* estimasinya:

$$\dot{\hat{x}}_b = -x_a + 10x_b - 10\hat{x}_b + u$$

Dengan demikian estimator orde terkurangnya adalah

$$\dot{x}_c = -10\hat{x}_b - x_a + u$$

### 4.3.3 Pemilihan lokasi *pole* estimator

*Pole – pole* estimator dapat dipilih lebih cepat 2-6 kali dibandingkan dengan *pole – pole* kendali. Ini akan menjamin peluruhan (*decay*) error estimator lebih cepat dibandingkan dinamika yang diinginkan sehingga *pole – pole* kendali mendominasi respon sistem keseluruhan. Jika *noise* pengukuran cukup dipertimbangkan maka kita bisa memilih *pole – pole* estimator lebih lambat 2 kali dianding *pole – pole* kendali sehingga diperoleh sistem dengan lebar pita (*bandwidth*) lebih

rendah dan memperhalus *noise*. Karena pembahasan ini difokuskan ke pemilihan *pole – pole* estimator, kita berharap bahwa respon sistem sangat dipengaruhi oleh lokasi *pole – pole* estimator. Lokasi *pole – pole* estimator yang lebih lambat diharapkan dapat mendominasi respon sistem terhadap gangguan (*disturbance*) dibandingkan dengan karakteristik *pole – pole* kendali.

Seperti pada pemilihan lokasi *pole – pole* kendali, terdapat umpan balik, biasanya berupa sinyal elektronika atau siny digital di komputer yang meningkat seiring dengan peningkatan respon sistem. Pada pengendali, peningkatan respon akan meningkatkan upaya kendali yang membutuhkan aktuator yang lebih besar dan tentu berbiaya lebih mahal. Adapun pada estimator, peningkatan respon artinya *bandwidth* akan lebih tinggi sehingga membutuhkan lebih banyak sensor *noise*. Dengan demikian, seperti pada desain kendali, desain estimator perlu menyeimbangkan respon transient yang bagus dan *bandwidth* yang cukup rendah.

Pertimbangkan persamaan estimator berikut:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (4.46)$$

Kemudian, pertimbangkan pula *noise* proses  $w$  dan *noise* sensor  $v$  dibawah ini:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_1w \quad (4.47)$$

$$y = Cx + v \quad (4.48)$$

Perhatikan bahwa *noise* sensor dikalikan dengan gain estimator  $L$ , sedangkan *noise* proses tidak. Jika  $L$  cukup kecil maka *noise* sensor bisa dihilangkan, tetapi respon estimator menjadi lambat dan tidak dapat menghilangkan pengaruh *noise* proses  $w$  dengan baik. Adapun jika  $L$  besar maka respon estimator menjadi cepat dan dapat menolak pengaruh *noise* proses  $w$ , tetapi menghasilkan error yang besar pada *noise* sensor  $v$  karena dikalikan dengan  $L$ . Sebagai penyeimbang, dapat juga digunakan kedudukan akar seimbang, *symmetric root locus* (SRL) seperti yang digunakan pada kasus kendali, berikut:

$$1 + qG_e(-s)G_e(s) = 0 \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

dimana  $q$  merupakan rasio antara intensitas *noise* proses dengan *noise* sensor dan  $G_e$  adalah fungsi alih antara *noise* proses dengan *noise* sensor

$$G_e(s) = C(sI - A)^{-1}B_1 \quad (4.51)$$

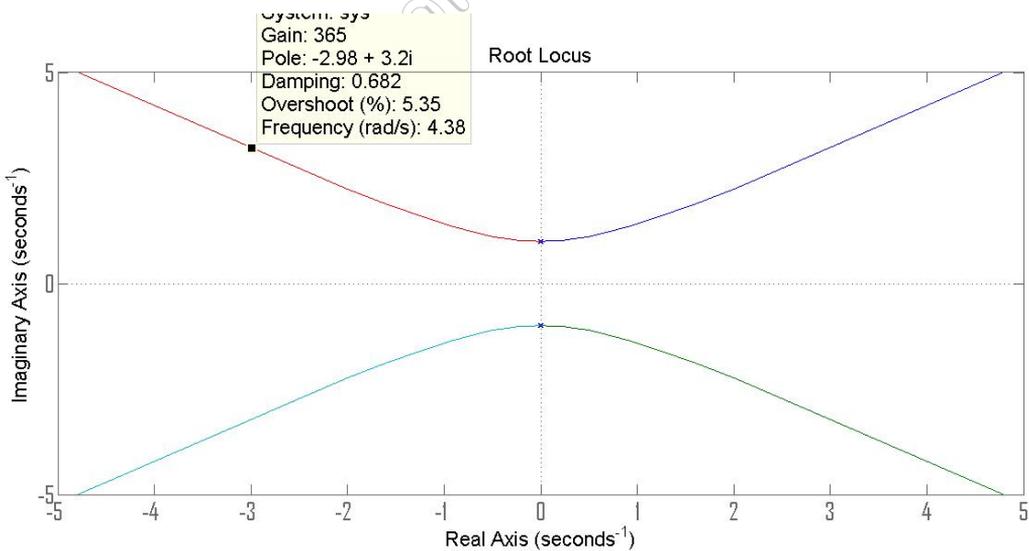
Sebagai contoh kasus, suatu sistem dengan ruang keadaan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_1;$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v$$

maka diperoleh fungsi alih SRL untuk estimatornya:

$$G_e(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$



Gambar 4.15: SRL estimator

Untuk nilai tertentu  $q=365$ , maka kita dapatkan *pole - pole* estimator  $-2.98 + j3.2$  dan  $-2.98 - j3.2$  yang dapat digunakan untuk penempatan *poles* estimator.

Untuk *poles* diatas, persamaan karakteristiknya  $(s+2.98+j3.2)(s+2.98-j3.2) = s^2+5.96s+19.12$  dan  $\det(sI-A+LC) = s^2+sL_1+1+L_2$ . Dengan demikian diperoleh gain estimator  $L = [5.96 \ 18.12]$

## 4.4 Desain Kompensator Kombinasi Kendali dan Estimator

Dengan menggabungkan pembahasan desain kendali dan estimator sebelumnya, maka diperoleh regulator yang mampu menolak gangguan, tetapi regulator ini tanpa *input* (masukan) yang dapat dijejaki. Bagaimanapun, karena desain kendali didesain untuk umpan balik sistem sesungguhnya, bukan sistem terestimasi maka kita dapat melihat pengaruh penggunaan  $\hat{x}$  menggantikan  $x$  pada dinamika sistem.

Persamaan karakteristik dan fungsi alih kompensator lup terbuka dihitung untuk membandingkan desain ruang keadaan dengan desain kedudukan akar dan respons frekuensi.

Pada sebuah regulator, persamaan sistem dengan umpan balik adalah:

$$\dot{\hat{x}} = Ax + B(-K\hat{x}) \quad (4.52)$$

yang juga dapat dituliskan dengan mempertimbangkan error estimasi  $e$

$$\dot{x} = Ax - BK(x - e) \quad (4.53)$$

Maka, bentuk ruang dinamika sistem keseluruhannya:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Dengan demikian, persamaan karakteristiknya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = 0 \quad (4.55)$$

Bentuk matrik diatas karena triangular dapat juga dituliskan:

$$\det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC) = \alpha_c(s) \cdot \alpha_e(s) = 0 \quad (4.56)$$

Sebagai contoh kasus, kita ulangi sistem dengan ruang keadaan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Diinginkan *poles* kendali di  $s_{p1} = -1$  dan  $s_{p2} = -2$ , *pole* estimator  $s_e = -5$ . Maka desain kendali dan estimator orde terkurangi, sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

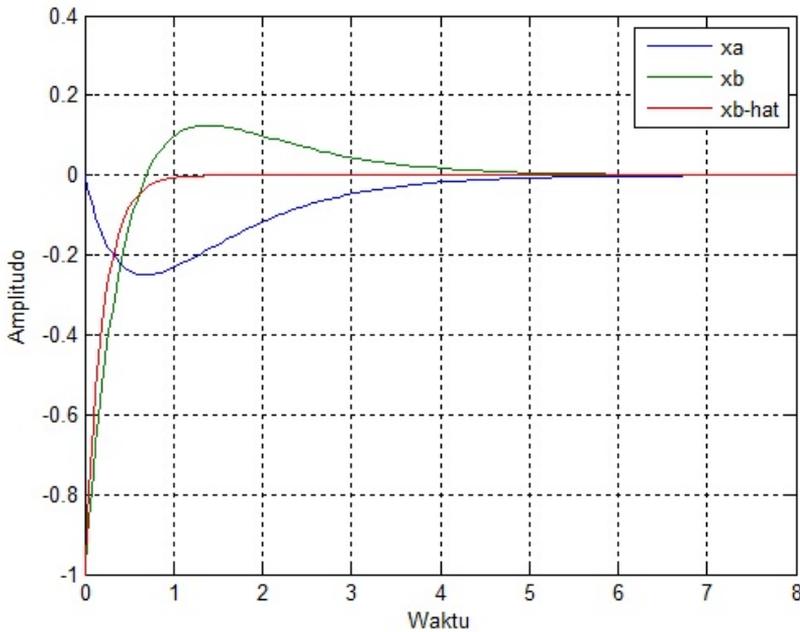
$$K = \text{place}(A, B, [-1 \ -2]); \text{ maka}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh estimator orde terkurangi  $L = 5$  sehingga persamaan lup tertutup sistem menjadi:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A - BK & 0 \\ 0 & A_{bb} - LA_{ab} \end{bmatrix} x$$

Trayektori *state* tergambar berikut ini (silakan merujuk pada lampiran **mat4-7**) :



Gambar 4.16: Trayektori  $x_a, x_b, \hat{x}_b$

#### 4.4.1 Pole – pole kombinasi kendali dan estimator

Kita ulangi persamaan ruang keadaan untuk kompensator kombinasi kendali dan estimator:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (4.57)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (4.58)$$

maka

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \quad (4.59)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (4.60)$$

dan persamaan karakteristiknya menjadi

$$\det(sI - A + BK + LC) = 0 \quad (4.61)$$

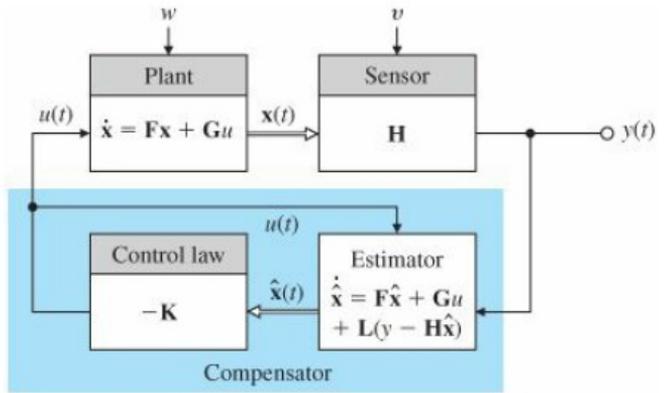
Adapun pada kendali, dengan ruang keadaan

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.62)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (4.63)$$

maka persamaan karakteristiknya menjadi

$$\det(sI - A) = 0 \quad (4.64)$$



Gambar 4.17: Kombinasi kendali dan estimator

#### 4.4.2 Fungsi alih kompensator

Dengan memperhatikan relasi antara persamaan ruang keadaan dan fungsi alih untuk sistem berikut

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.65)$$

$$u = -Kx \quad (4.66)$$

dimana fungsi alihnya:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.67)$$

maka kita dapat mengadopsi fungsi alih untuk kompensator kombinasi kendali dan estimator pada persamaan (4.61-4.62) menjadi

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = D(s) = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}L \quad (4.68)$$

### 4.4.3 Fungsi alih kompensator orde terkurangi

Untuk estimator orde terkurangi, aksi kendali

$$u = - \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Substitusi ke persamaan (4.45) untuk mendapatkan ruang keadaan kompensator orde terkurangi sebagai berikut:

$$\dot{x}_c = A_r x_c + B_r y \quad (4.70)$$

$$u = C_r x_c + D_r y \quad (4.71)$$

sehingga fungsi alih kompensator orde terkurangi sebagai berikut:

$$D_{cr} = C_r (sI - A_r)^{-1} B_r + D_r \quad (4.72)$$

dimana

$$A_r = A_{bb} - LA_{ab} - (B_b - LB_a)K_b$$

$$B_r = A_r L + A_{ba} - LA_{aa} - (B_b - LB_a)K_a$$

$$C_r = -K_b$$

$$D_r = -K_a - K_b L$$

Sebagai contoh, sebuah sistem  $\frac{1}{s^2}$  diinginkan memiliki *pole - pole* kendali pada  $s = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + j)$  dan  $s = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - j)$ . Artinya sistem memiliki  $\omega_n = 1$  dan  $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Diinginkan juga *pole - pole* estimator-nya pada  $\omega_n = 5$  dan  $\zeta = 0.5$ , maka desain kompensatornya sebagai berikut:

Ruang keadaan sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Persamaan karakteristiknya

$$\alpha_c = s^2 + \sqrt{2}s + 1 = [sI - A + BK]$$

sehingga diperoleh  $K = [1 \quad \sqrt{2}]$  Adapun persamaan karakteristik *pole – pole* estimator

$$\alpha_e = s^2 + 5s + 25 = [sI - A + LC]$$

sehingga diperoleh  $L = [5 \quad 25]^T$  Fungsi alih kompensator diperoleh dengan merujuk persamaan (4.70) berikut:

$$D(s) = -40.4 \frac{(s + 0.619)}{(s + 3.21 + j4.77)(s + 3.21 - j4.77)}$$

Untuk desain kompensator orde terkurangi (*reduced order compensator*), misal diinginkan *pole* estimatornya di  $s = -5$  sehingga  $\alpha_e = s + 5 = \det(sI - A_{bb} - LA_{ab}) = 0$ , maka diperoleh  $L = 5$ . Fungsi alih kompensator orde terkurangi diperoleh dengan merujuk persamaan (4.74) berikut:

$$D_{cr}(s) = -\frac{8.07(s + 0.619)}{(s + 6.41)}$$

## 4.5 Soal Latihan

1. Susunlah sebuah persamaan ruang keadaan untuk *state*  $x$  dan  $\hat{x}$  dengan keluaran  $y$  dan estimasi keluaran  $\hat{y}$  pada sebuah sistem dengan kendali dan estimator. Buatlah diagram bloknya.
2. Fungsi alih sebuah sistem adalah  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2+4}$ 
  - (a) Tuliskan persamaan ruang keadaannya
  - (b) Desainlah kendali yang menempatkan 2 pole sistem di  $-2 + 2j$  dan  $-2 - 2j$
3. Hitung gain masukan yang dibutuhkan sehingga masukan acuan memiliki *error steady state* sama dengan nol untuk sistem berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \quad 0] x \end{aligned}$$

4. Sebuah pendulum terbalik sederhana dengan frekuensi alami  $\omega_n = 2 \text{ rad/det}$ , dituliskan dalam persamaan diferensial  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \omega_n^2 x_1 - u$  dimana  $x_1, x_2$  masing-masing posisi dan kecepatan ayunan pendulum. Keluaran sistem merupakan penjumlahan posisi dan kecepatan.
- Desainlah kendali untuk sistem pendulum ini sehingga respon unit step untuk lup tertutupnya memiliki spesifikasi overshoot kurang dari 25 % ( $\zeta = 0.4$ ) dan waktu settling 1% nya kurang dari 0.115 detik
  - Dengan metode kedudukan akar simetri (*Symmetric Root Locus, SRL*), tentukan pole yang paling optimal (stabil) jika persamaan SRL adalah  $1 + \rho \frac{(N(-s)N(s))}{(D(-s)D(s))} = 0$ , dimana  $\rho, N, D$  masing-masing adalah faktor bobot pilihan desainer, numerator dan denominator fungsi alih sistem
5. Sebuah pendulum terbalik yang dikendalikan melalui pergerakan dorongan-tarikan *cart*, memiliki persamaan diferensial berikut:  $\ddot{\theta} = \theta + u, \ddot{x} = -\beta\theta - u$ , dimana  $\theta, x, u$  masing-masing adalah sudut pendulum, posisi *cart* dan aksi kendali *cart*
- Tentukan kendali  $K$  sehingga *poles* lup tertutupnya terletak di  $-1, -1, -1+j$  dan  $-1-j$  dengan mendefinisikan peubah keadaan masing-masing adalah  $\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}$  dan diketahui  $\beta = 0.5$
  - Dengan metode SRL, pilihlah *poles* dengan lebar pita yang cukup dekat dengan soal (a), tentukan pula gain kendalinya
  - Dengan kondisi awal  $\theta = 10^0$ , bandingkan trayektori keadaan (*states*) pada soal (a) dan (b)
  - Hitunglah  $N_x, N_u$  untuk kesalahan steady state dengan masukan konstan pada posisi *cart*, bandingkan respon unit step untuk kedua sistem lup tertutupnya.
6. Buatlah diagram blok yang menggambarkan struktur estimator orde terkurangi dengan memperhatikan persamaan (4.34)-(4.45) diatas.

7. Sebuah sistem dengan persamaan ruang keadaan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

diinginkan memiliki 2 *pole* estimator pada -1 dan -2. Sedangkan *pole - pole* kendali yang diinginkan adalah -1 dan -1. Desainlah gain kendali  $K$  dan gain estimator  $L$ , tentukan pula fungsi alih dari kompensator tersebut. Tampilkan trayektori keadaan  $x$  dan  $\hat{x}$  jika kondisi awalnya untuk semua *state*  $x(0) = [1 \ 0 \ -1 \ 1]^T$

8. Sebuah sistem  $G(s) = \frac{4}{s^2-4}$ ,

- (a) Tentukan ruang keadaannya dalam *observable canonical*.
- (b) Diinginkan *pole - pole* kendali terletak di  $s = -2 + j2$ ,  $s = -2 - j2$  dan estimator terletak di  $s = -10 + j10$ ,  $s = -10 - j10$ , maka tentukan fungsi alih kompensator yang didesain.

---

### Desain Kompensator dengan Masukan Acuan

---

Pada pembahasan sebelumnya, desain kendali dan estimator secara esensial merupakan sebuah desain regulator yang menghasilkan pemilihan persamaan karakteristik yang bagus untuk penolakan gangguan (*disturbance rejection*) tanpa mempertimbangkan masukan acuan (*reference input*) yang biasa dibutuhkan pada sistem yang mengikuti acuan (*tracking*) atau *command following*. Dua spesifikasi yang baik yakni penolakan terhadap gangguan dan kemampuan mengikuti acuan merupakan kebutuhan desain sistem kendali. Pada bab ini akan dijelaskan desain kompensator kombinasi kendali dan estimator dengan masukan acuan, struktur desainnya, kendali integral dan penjejakan kokoh (*robust tracking*).

#### 5.1 Gambaran Umum

Pertimbangkan lagi sebuah *plant* sistem dan kompensator dengan estimator orde penuh; adapun orde terkurangi akan sama secara konsep;

sebagai berikut:

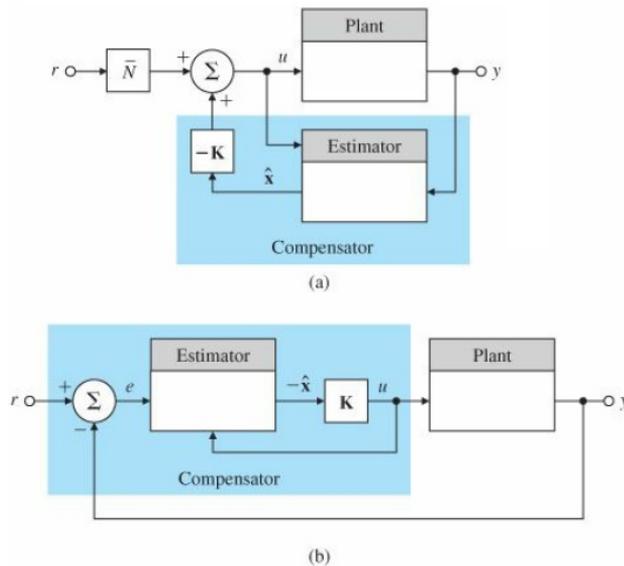
$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx \quad (5.1)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly, u = -K\hat{x} \quad (5.2)$$

Persamaan karakteristiknya:

$$\det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC) = 0 \quad (5.3)$$

Blok diagram sistem kendali dengan kompensator yang memperhatikan masukan acuan dapat digambarkan dibawah ini, dengan letak kompensator sebagai umpan balik (*feedback*) maupun umpan maju (*feedforward*)



Gambar 5.1: Desain kompensator dengan masukan acuan

### 5.1.1 Struktur pada Masukan Acuan

Adanya masukan acuan  $r$  menambah parameter vektor  $M$  dan skalar  $N$  pada persamaan kompensator (5.2) sebagai berikut:

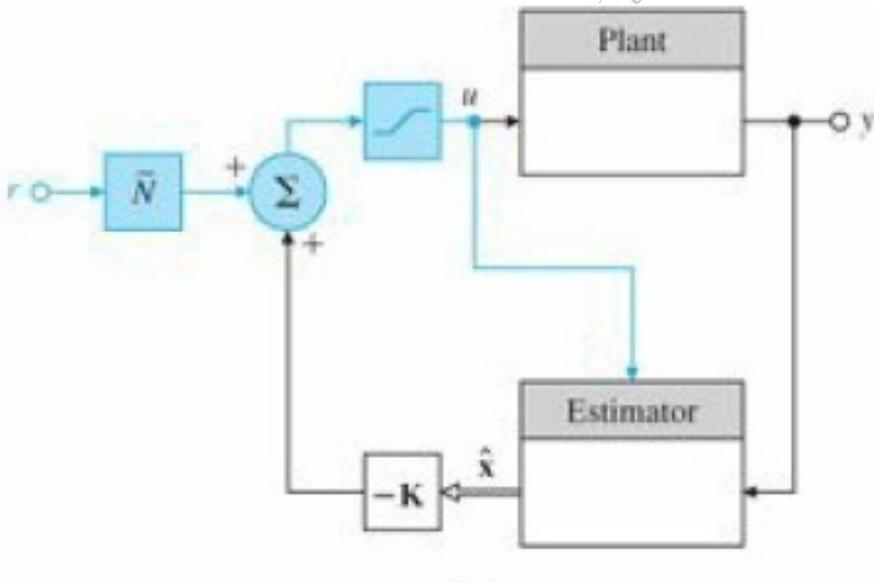
$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly + Mr, \quad (5.4)$$

$$u = -K\hat{x} + Nr \quad (5.5)$$

Karena  $r(t)$  merupakan sinyal eksternal, maka baik nilai  $M$  atau  $N$  tidak mempengaruhi perpindahan *zeros* dari  $r$  ke  $y$  sehingga tidak mempengaruhi kestabilan, hanya mempengaruhi tanggapan *transient*. Untuk mendapatkan tanggapan *transient* yang bagus, maka pemilihan  $M$  dan  $N$  dilakukan dengan pemilihan *pole – pole* sistem oleh *gain* umpan balik  $K, L$  dan pemilihan *zero – zero* oleh *gain* umpan maju  $M, N$

Ada tiga cara untuk menentukan  $M, N$

- Estimator otonomus: pilih  $M, N$  sehingga persamaan *error* keadaan estimator bebas terhadap  $r$



Gambar 5.2: Estimator otonomus

Metode ini paling banyak dipakai. Jika  $\hat{x}$  mengestimasi cukup baik state  $x$ , maka error estimasi  $e$  akan bebas terhadap eksitasi eksternal; artinya  $e$  *uncontrolable* terhadap  $r$ .

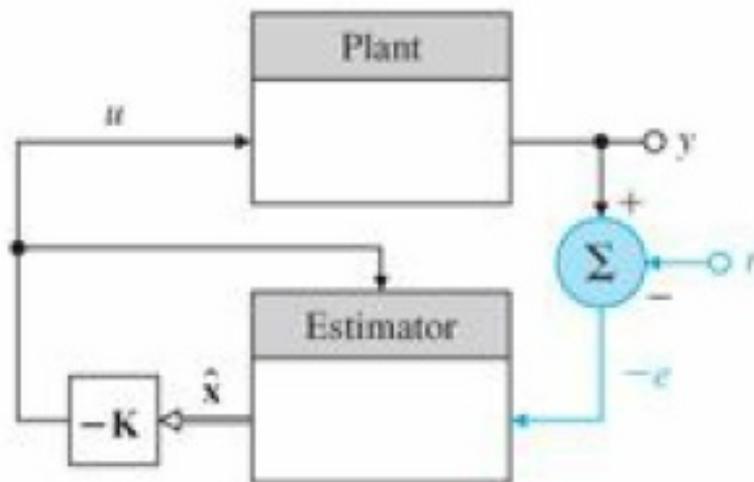
$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\
 &= Ax + B(-K\hat{x} + Nr) - ((A - BK - LC)\hat{x} + Ly + Mr) \\
 \dot{e} &= (A - LC)e + BNr - Mr \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

Untuk menghilangkan  $r$  pada (5.6), dipilih  $M = BN$ . Dengan demikian persamaan kendalinya:

$$u = -K\hat{x} + Nr \tag{5.7}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \tag{5.8}$$

- Estimator error penjejakan (*tracking - error*): pilih  $M, N$  sehingga hanya error penjejakan  $e = r - y$  yang digunakan pada kendali

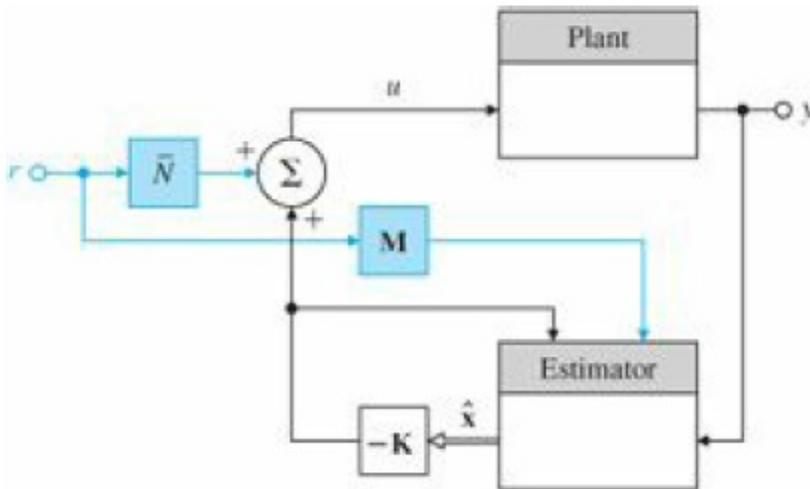


Gambar 5.3: Estimator error penjejakan

Pada kondisi ini, solusi diambil ketika misalnya sensor hanya bisa mengukur kesalahan keluaran (*output*). Kondisi ini terpenuhi dengan memilih  $N = 0$  dan  $M = -L$  sehingga persamaan estimator menjadi

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + L(y - r) \quad (5.9)$$

- Estimator penugasan zero (*zero - assignment*): pilih  $M, N$  sehingga *zero - zero* fungsi alih ditempatkan sesuai pilihan perancang kendali. i



Gambar 5.4: Estimator penugasan-zero

Metode ini memilih  $M$  dan  $N$  sesuai dengan penempatan *zero* dilokasi yang dikehendaki. Jika tidak ada estimator dan input acuan pada suatu sistem kendali, maka *zero - zero* sistem lup tertutupnya akan tetap seperti pada plant lup terbukanya. Disini, ditunjukkan pengaruh estimator terhadap *zero-zero* dengan menganalisa persamaan (5.4)-(5.5). Jika ada sebuah *zero* dari transmisi  $r$  ke  $u$ , maka akan ada *zero* transmisi dari  $r$  ke  $y$  kecuali jika ada sebuah *pole* yang posisinya sama dengan posisi *zero*. Oleh karena itu, cukup untuk mengutak-atik bagian kendali saja untuk melihat pengaruh pemilihan  $M, N$  pada *zero - zero* sistem. Persamaan untuk *zero* dari  $r$  ke  $u$  diberikan dengan mengeset  $y = 0$  karena fokus pada pengaruh  $r$

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + BK + LC & -M \\ -K & N \end{bmatrix} = 0 \quad (5.10)$$

Karena  $N$  skalar dan determinan sama dengan nol, maka persamaan diatas identik dengan persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI - A + BK + LC - \frac{M}{N}K & -\frac{M}{N} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 0, \\ \det(sI - A + BK + LC - \frac{M}{N}K) &= \gamma(s) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Terlihat bahwa persamaan (5.13) merupakan persamaan karakteristik *error*, bertujuan mendapatkan gain estimator  $L$  dari penempatan *poles* estimato. Pemilihan  $M, N$  dipertimbangkan pada sistem dengan masukan acuan untuk polinomial *zero*  $\gamma(s)$  di fungsi alih antara masukan acuan  $r$  dan kendali  $u$ . Sebagai contoh, permasalahan menaikkan konstanta kecepatan (*velocity constant*,  $K_v$ ) melalui penugasan *zeros* ditunjukkan berikut ini. Sebelumnya untuk sistem tipe 1, berlaku *error steady state* dan konstanta kecepatan dari formula Truxal berikut :

$$e_\infty = \frac{1}{K_v} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{K_v} = \sum \frac{1}{z_i} - \sum \frac{1}{p_i} \quad (5.13)$$

Sebuah sistem orde dua

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Diinginkan *poles*-nya terletak di  $s = -2+j2$  dan  $s = -2-j2$ ,  $K_v = 10$ . Sementara untuk sistem dengan *poles* tersebut berdasarkan persamaan (5.15),  $K_v = 2$ . Untuk itu, dengan penugasan *zeros* ditentukanlah

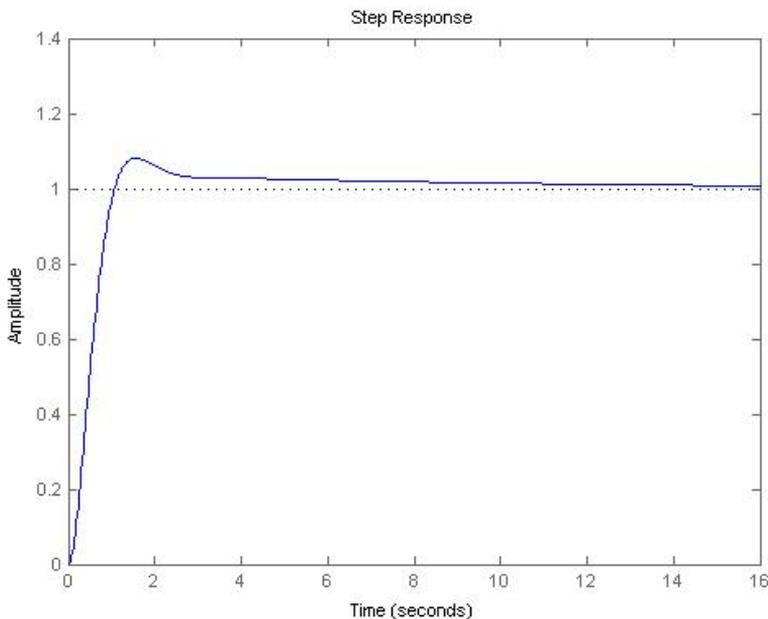
$z_3$ . Konsekuensinya, disetlah *pole*,  $p_3$  yang dijaga selisihnya  $z_3 - p_3$  kecil supaya pengaruh terhadap tanggapan dinamik cukup kecil dan selisih  $\frac{1}{z_3} - \frac{1}{p_3}$  menjadi cukup besar untuk mengubah  $K_v$ . Maka ditentukan  $p_3 = -0.1$  dan sesuai dengan persamaan Truxal

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \frac{1}{z_3} - \frac{1}{2+j2} - \frac{1}{2-j2} - \frac{1}{-0.1} \\ z_3 &= -0.096 \end{aligned}$$

Sehingga, fungsi alih lup tertutupnya menjadi

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = K_1 \frac{s + 0.096}{(s + 2 + j2)(s + 2 - j2)(s + 0.1)}$$

Dengan menentukan  $K_1 = 8.32$ , diperoleh tanggapan unit step sistem seperti dibawah



Gambar 5.5: Respon Step contoh penugasan-zero

### 5.1.2 Pemilihan Penguatan (*Gain*)

Untuk menentukan penguatan  $N$  berdasarkan 3 cara pemilihan  $M$ , jika cara pertama maka  $u = -K\hat{x} + Nr$ , keadaan estimasi sama dengan keadaan nominal *steady state*,  $\hat{x}_{ss} = x_{ss}$  sehingga bisa digunakan  $N = N_u + KNx$  atau  $u = N_u r - K(\hat{x} - N_x r)$ . Jika dipilih cara ke-2, maka  $N = 0$  dan jika cara ke-3 maka  $N$  diambil sehingga penguatan DC lup tertutupnya sama dengan satu. Persamaan sistemnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B - M \end{bmatrix} Nr; \quad (5.14)$$

$$y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

dimana  $M$  bisa dipilih dari  $\gamma(s)$  atau  $M = BN$ . Sistem lup tertutup memiliki gain satu (*unity*) jika

$$- [C \ 0] \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B - M \end{bmatrix} N = 1 \quad (5.16)$$

dan

$$N = \frac{1}{H(A - BK)^{-1}G[1 - K(A - LC)^{-1}(B - M)]} \quad (5.17)$$

## 5.2 Kendali Integral dan Penjejakan Kokoh (*Robust Tracking*)

Metode pemilihan penguatan menghasilkan *error steady state* sama dengan nol untuk tanggapan unit *step* tetapi tidak kokoh akibat adanya perubahan pada parameter *plant*. Disini diperlukan kendali integral untuk penjejakan yang kokoh.

### 5.2.1 Kendali Integral

Pertimbangkan pemisahan (*augmenting*) vektor keadaan sesuai dinamika yang diinginkan, untuk sistem berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_1w \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Diasumsikan tambahan keadaan integral  $x_I$ , yang mempunyai persamaan differensial

$$\dot{x}_I = Cx - r = e$$

dan

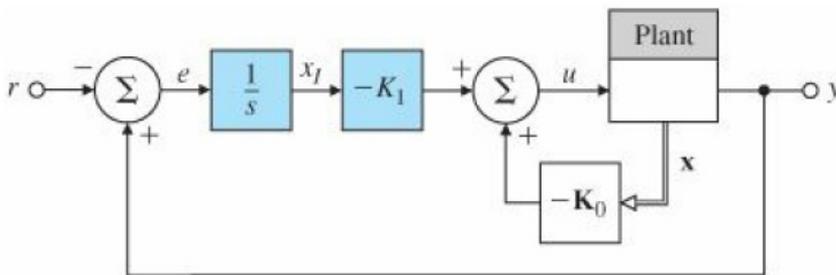
$$x_I = \int^t edt$$

Maka persamaan augmentasinya

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

dengan kendali umpan baliknya

$$u = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$



Gambar 5.6: Kendali Integral

Sebagai contoh, sebuah *plant* dengan fungsi alih

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

Diinginkan desain kendali integral untuk sistem tersebut, dengan dua *pole* di  $s = -5$  dan estimator dengan *pole* di  $s = 10$ . Gangguan letaknya sama dengan kendali, maka solusinya

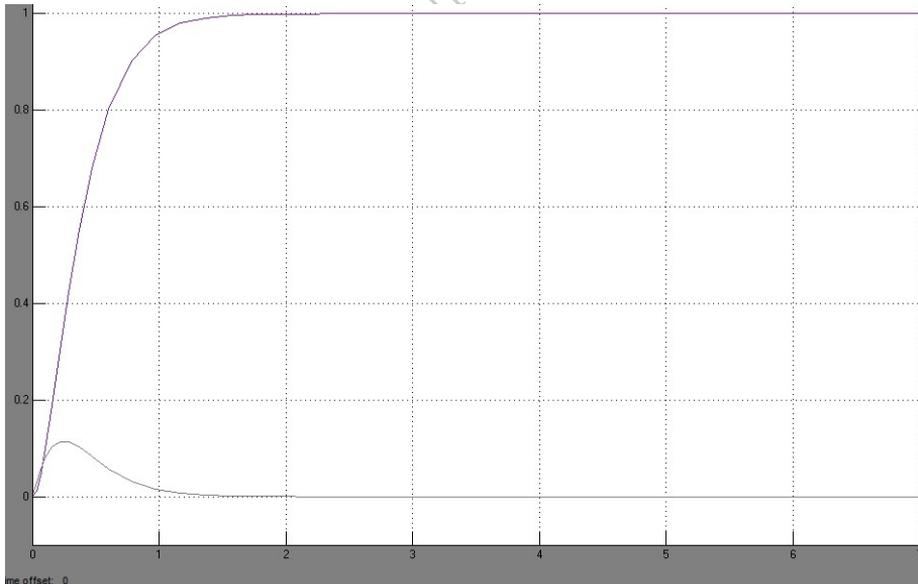
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u+w) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Selanjutnya, dapat kita tentukan *gain* kendali dan estimator dibawah ini:

$$\begin{aligned} \det(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K) &= s^2 + 10s + 25 \\ s - (-3) + L(1) &= s + 10 \end{aligned}$$

maka  $K = [25 \ 7]$  dan  $L = 7$ .

Respon sistem kendali integral dengan gangguan digambarkan berikut ini



Gambar 5.7: Respon Kendali Integral

## 5.2.2 Penjejukan Kokoh

Pada sub-bab sebelumnya, masukan acuan dan gangguan diatasi dengan kendali integral. Adapun pada sub-bab ini, teknik ruang-error untuk kendali penjejukan kokoh diaplikasikan pada proses penjejukan (*tracking*) masukan *nondecaying* dan untuk menolak gangguan *nondecaying* seperti unit step, tanjakan (*ramp*) ataupun sinyal sinusoidal.

Pertimbangkan sebuah sistem dengan ruang keadaan:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_1w \quad (5.19)$$

$$y = Cx \quad (5.20)$$

dengan sinyal acuan yang memiliki persamaan diferensial tertentu dan kondisi awal yang tidak diketahui, semisal masukan dan gangguan berupa sinyal tanjakan *ramp* dengan kemiringan (*slope*) dan nilai awal yang tidak diketahui. Desain kendali bertujuan supaya sistem lup tertutup memiliki *pole – pole* spesifik, dapat menjejukan acuan dan kemampuan untuk menolak gangguan (*disturbance*).

Kita fokuskan pada persamaan diferensial orde dua, masukan acuan dan gangguan masing-masing adalah

$$\ddot{r} + \alpha_1\dot{r} + \alpha_2r = 0 \quad (5.21)$$

$$\ddot{w} + \alpha_1\dot{w} + \alpha_2w = 0 \quad (5.22)$$

Selisih (*error*)

$$e = y - r \quad (5.23)$$

Permasalahan penjejukan terhadap  $r$  dan menolak gangguan  $w$  dapat ditunjukkan oleh *error steady state* sistem, dan trayektori  $e$  yang menuju nol meski adanya sedikit gangguan. Oleh karena model sistem senantiasa berubah secara praktis, maka isu kekokohan (*robustness*) menjadi sangat penting di dalam desain sistem kendali.

Selanjutnya, persamaan (5.23) diubah dengan menghilangkan  $r$  dan memunculkan  $e$  saja memanfaatkan persamaan (5.25) menjadi berikut ini

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_2 e = \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y \quad (5.24)$$

$$= C\ddot{x} + \alpha_1 C\dot{x} + \alpha_2 Cx \quad (5.25)$$

### 5.3 Soal Latihan

1. Dengan merujuk pada contoh permasalahan meningkatkan konstanta kecepatan  $K_v$  sebelumnya, maka carilah kendali sistem tersebut, jika diketahui  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Kemudian buatlah blok diagram sistem kendali lup tertutup tersebut
2. Sebuah sistem

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

merujuk pada contoh permasalahan meningkatkan konstanta kecepatan  $K_v$  sebelumnya, maka carilah kendali sistem tersebut, jika diketahui  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Kemudian buatlah blok diagram sistem kendali lup tertutup tersebut

---

## Daftar Pustaka

---

1. K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice Hall, 4th Edition, 2002
2. G. F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems", Pearson, 6th Edition, 2010
3. N.S. Nise, "Control Systems Engineering", Wiley, 4th Edition, 2004
4. R.S. Burns, "Advanced Control Engineering", Butterworth-Heinemann, 2001

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

---

## Lampiran Kode Program

---

### **mat4-1**

```
function dXdt = pend(ttemp,Xtemp)
global A B K
M=[A-B*K]
dXdt = M*Xtemp;
```

### *simulation*

```
global A B K
X0=[1;0];
[ttemp,Xtemp]=ode45('mat4-1', [0 10],X0)
t=ttemp;
x=[Xtemp(:,1) Xtemp(:,2)];
figure(1)
plot(t,x)
ylabel('Amplitudo')
xlabel('Waktu')
grid on
legend('x1','x2')
```

### **mat4-2**

```
A=[0 1;-1 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;
a=[A B;C D];b=[0;0;1];
```

```

N=inv(a)*b;
Nx=N(1:2,:);
Nu=N(3,:);
K=[3 4];
N-=Nu+K*Nx
An=A-B*K;
Bn=B*N-
sys=ss(An,Bn,C,D)
[Y, T, X] = step(sys)
u=-K(1)*X(:,1)-K(2)*X(:,2)+N- ;
figure(1)
plot(T,X(:,1),'b-',T,X(:,2),'r-',T,0.25*u,'g-')
ylabel('Amplitudo')
xlabel('Waktu')
grid on
legend('x1','x2','u/4')

```

### mat4-3

```

close all;clear all
zet=0
for k=1:96
zeta(k)=zet+0.01;
Mp(k) = exp((-pi * zeta(k))/(sqrt(1 - zeta(k) * zeta(k))))
zet=zeta(k);
end
plot(zeta,Mp,'b-')
xlabel('rasio redaman')
ylabel('lonjakan/overshoot')

```

### mat4-4

```

num=1
den=conv([1 0 1],[1 0 1])
sys=tf(num,den)
rlocus(sys)

```

### mat4-4a dominant second order

```

A=[-1 -2 -2;0 -1 1;1 0 -1];B=[0;0;1];C=[1 0 0];D=0;

```

```

sys=ss(A,B,C,0);
step(sys*(-1/0.8))
pc=[-0.707+j*0.707;-0.707-j*0.707;-10]/0.707;
K=acker(A,B,pc);
An=A-B*K;
sys1=ss(An,B,C,0);
figure(1)
step(sys1*(-1/0.142))
ylabel('Amplitudo')
xlabel('Waktu')
title('Pemilihan poles dengan dominant orde kedua')

```

#### **mat4-4b SRL**

```

num1=1;den1=[1 1];num2=1;den2=[-1 1];
num=conv(num1,num2);den=conv(den1,den2);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)

```

#### **mat4-5a** *kombinasi kendali dan estimator orde terkurangi*

```

function dXdt = kend-red-est(ttemp,Xtemp)
global A Abb Aab B C K L
M=[A-B*K zeros([2 1]);zeros([1 2]) Abb-L*Aab]
dXdt = M*Xtemp;

```

```

A=[0 1;-1 0];B=[0;1];C=[1 0];Abb=0;Aab=1;
K=place(A,B,[-1 -2]);L=5
global A Abb Aab B C K L
X0=[0;-1;-1];
[ttemp,Xtemp]=ode45('kend-red-est',[0 8],X0)
t=ttemp;
x=[Xtemp(:,1) Xtemp(:,2) Xtemp(:,3)];
figure(1)
plot(t,x)
ylabel('Amplitudo')
xlabel('Waktu')
grid on
legend('xa','xb','xb-hat')

```

erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

---

## Daftar Gambar

---

1.1	Sistem Otomotif . . . . .	2
1.2	Pergerakan Pesawat . . . . .	2
1.3	Skema mesin uap sederhana . . . . .	3
1.4	Gerak Kendaraan dan Diagram Badan Bebasnya . . . . .	6
1.5	Sistem Kendali Lup Terbuka dan Tertutup . . . . .	7
1.6	Konfigurasi umpan balik dan ekuivalennya . . . . .	8
2.1	Skema dari resistor, induktor dan kapasitor . . . . .	13
2.2	Rangkaian $RC$ . . . . .	14
2.3	Rangkaian $RLC$ . . . . .	15
2.4	Elastisitas linier: translasi dan rotasional . . . . .	15
2.5	Redaman linier . . . . .	16
2.6	Massa linier: percepatan translasi dan percepatan anguler . . . . .	17
2.7	Sistem massa-redaman-pegas dan diagram <i>free-body</i> nya . . . . .	18
2.8	Roda gila pada bantalan . . . . .	19
2.9	Sistem perpindahan panas . . . . .	20
2.10	Rangkaian RLC . . . . .	25
2.11	Sistem mekanik . . . . .	26
2.12	Sistem perpindahan panas, tungku dan oven . . . . .	27
2.13	Rangkaian elektrik . . . . .	28
2.14	Sistem mekanik . . . . .	28
2.15	Sistem RLC . . . . .	29

3.1	Blok Diagram Sistem Kendali . . . . .	32
3.2	Struktur Ruang Keadaan . . . . .	35
3.3	Diagram Blok Sistem Differensial Relasi Masukan-Keluaran	37
3.4	Rangkaian Listrik . . . . .	41
4.1	Struktur Kendali dan Estimator . . . . .	48
4.2	Trayektori keadaan ( <i>states</i> ) untuk $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \omega_0 = 1$ . . . . .	50
4.3	Tanggapan sistem terhadap masukan acuan unit step . . . . .	53
4.4	Overshoot vs $\zeta$ . . . . .	55
4.5	Definisi beberapa parameter tanggapan sistem orde dua . . . . .	55
4.6	Respon step sistem awal . . . . .	57
4.7	Respon step dominasi <i>poles</i> orde dua . . . . .	57
4.8	Pengaruh dominasi poles orde dua terhadap sistem . . . . .	58
4.9	SRL untuk sistem $G(s) = \frac{1}{s+1}$ . . . . .	59
4.10	Respon step untuk sistem tanpa dan dengan kendali SRL . . . . .	60
4.11	Estimator lup terbuka . . . . .	61
4.12	Desain estimator dengan umpan balik . . . . .	62
4.13	Tayektori <i>state</i> estimasi $\hat{x}_1$ dan $\hat{x}_2$ , dengan $\hat{x}(0) = [1 \ 0]^T$ . . . . .	63
4.14	Tayektori <i>state</i> estimasi $\hat{x}_b$ . . . . .	66
4.15	SRL estimator . . . . .	68
4.16	Trayektori $x_a, x_b, \hat{x}_b$ . . . . .	71
4.17	Kombinasi kendali dan estimator . . . . .	72
5.1	Desain kompensator dengan masukan acuan . . . . .	78
5.2	Estimator otonomus . . . . .	79
5.3	Estimator error penjejakan . . . . .	80
5.4	Estimator penugasan-zero . . . . .	81
5.5	Respon Step contoh penugasan-zero . . . . .	83
5.6	Kendali Integral . . . . .	85
5.7	Respon Kendali Integral . . . . .	86