



Kendali *Guaranteed Cost* Berbasis Pengamat Orde Minimum Pada Sistem Tak Pasti Waktu Kontinyu

Erwin Susanto

Institut Teknologi Telkom Bandung
Email: ews@ittelkom.ac.id

Abstrak-Makalah ini mempresentasikan skema desain pengendali *guaranteed cost* berbasis pengamat orde minimum pada sistem tak pasti waktu kontinyu. Ketidakpastian pada sistem yang sering kali merupakan gangguan atau noise diasumsikan mengikuti persamaan tertentu. Berdasarkan contoh numerik, desain kendali dan pengamat menghasilkan sistem dengan kestabilan dan kinerja yang optimal.

Kata kunci: pengamat orde minimum, kendali *guaranteed cost*, sistem tak pasti

1. PENDAHULUAN

Selama beberapa dekade terakhir, permasalahan kestabilan pada sistem dengan ketidakpastian menarik perhatian banyak peneliti di bidang kendali. Hal ini karena munculnya parameter-parameter ketidakpastian pada aplikasi sistem kendali tidak dapat dihindari dan seringkali menyebabkan ketidakstabilan dan penurunan kinerja sistem. Pendekatan kendali *guaranteed cost* terbukti dapat menyelesaikan analisa kestabilan pada sistem dengan ketidakpastian, tidak hanya berhasil mencapai kestabilan melainkan juga menjamin kinerja sistem pada level yang memadai [1], [2].

Pada makalah ini, skema desain kendali *guaranteed cost* dengan pengamat orde minimum dipresentasikan. Ketidakpastian diasumsikan memiliki format tertentu, *norm-bounded*, kondisi awal sistem tidak diketahui tetapi rerata (*mean*) dan kovariannya diasumsikan diketahui. Mengingat ketersediaan keadaan (*states*) sistem sulit diperoleh karena permasalahan biaya dan metode pengukuran, ketidakpastian yang dinamis dan sebagainya maka penggunaan pengamat (*observer*) lebih memungkinkan daripada kendali umpan balik [3].

Meskipun desain kendali *guaranteed cost* menggunakan pengamat telah banyak dipublikasikan, umumnya menggunakan pengamat orde penuh (*full order observer*). Studi pada makalah ini mengaplikasikan pengamat orde minimal (*minimal order observer*). Sistem dengan pengamat orde minimal, sebagian dari keadaannya terukur, sebagian tidak terukur sehingga memerlukan estimasi.

Studi tentang kendali *guaranteed cost* untuk sistem tak pasti dengan pengamat order minimal telah dibahas pada [4], yang diaplikasikan untuk model helikopter tak linier dengan tiga derajat kebebasan. Ketidaklinieran pada model helikopter ini diasumsikan sebagai parameter ketidakpastian. Adapun studi pada makalah ini, kendali *guaranteed cost* diaplikasikan pada sistem tak stabil. Berdasarkan contoh numerik, desain kendali dan pengamat menghasilkan sistem yang stabil.

1. Perumusan Masalah

Suatu sistem tak pasti waktu kontinyu diformulasikan dalam ruang keadaan berikut:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

Dimana

$$x(t) \in \mathcal{R}^n, u(t) \in \mathcal{R}^r, y(t) \in \mathcal{R}^m$$

masing-masing adalah vektor keadaan, masukan kendali dan keluaran. Matrik A, B, C adalah matriks konstanta bernilai real, dibatasi oleh $C = [0 \ I_m]$. Matrik A, B merupakan parameter ketidakpastian.

Diasumsikan bahwa ketidakpastian:

$$A(t) = D_A F_A(t) E_A, \quad B(t) = D_B F_B(t) E_B \quad (3)$$

Memenuhi

$$F_A^T(t) F_A(t) \leq I, \quad F_B^T(t) F_B(t) \leq I \quad (4)$$

dimana $F_A(t), F_B(t)$ adalah matrik deterministik berubah waktu, D_A, D_B, E_A, E_B merupakan matriks konstanta bernilai real dengan dimensi yang sesuai.

Variabel kondisi awal $x(0)$, rerata dan kovariannya memiliki hubungan:

$$E[x(0)] = m_0 \quad (5)$$

$$E[(x(0) - m_0)(x(0) - m_0)^T] = \sigma_0 > 0 \quad (6)$$

dimana $E[\cdot]$ merupakan operator ekspektasi.

Untuk pengamat orde minimal, diasumsikan pula

$$z(0) - Tm_0 = 0 \quad (7)$$

Pada studi ini, suatu pengamat orde minimal dan sebuah pengendali didesain sebagai berikut:

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + Ey(t) + Fu(t) \quad (8)$$

$$\hat{x}(t) = Pz(t) + Wy(t) \quad (9)$$

$$u(t) = K \hat{x}(t) \quad (10)$$

Dengan

$$D = A_{11} + LA_{21}, PT + WC + I_n, F = TB, TA - DT = EC$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & L \end{bmatrix}$$

untuk mencapai batas tinggi dari indeks performansi kuadratik

$$E[J] = E \left[\int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \right] \quad (11)$$

dimana Q dan R matrik definit positif simetris tertentu.

Gain umpan baliknya dirumuskan:

$$K = -R^{-1}B^T S_1 \quad (12)$$

dimana variabel S_1 merupakan matrik definit positif simetris.

2. Pembahasan

Pembahasan utama dari studi ini diberikan oleh Teorema 1, berikut ini :

Teorema 1. Jika optimasi pertidaksamaan matrik; $\min(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)$ mengacu pada

$$\begin{bmatrix} \Lambda_0 & XE_A^T & XE_A^T & X^T \\ * & -gI & 0 & 0 \\ * & * & -{}_n I & 0 \\ * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_0 & G_1^T & G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_3^T & G_4^T \\ * & -uI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -{}_n \text{inv} I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_{\text{inv}} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -{}_n \text{inv} I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\sum e_{nk}^T e_{nk} < 0, \sum e_{mk}^T e_{mk} < 1, \sum e_{mk}^T e_{nk} < 2, \sum e_{mk}^T e_{mk} < 3, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -X_4 & v_1^T Y^T & v_2^T Y^T & \dots & v_m^T Y^T \\ * & -S_2 & & & \vdots \\ * & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & -S_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

dimana

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= AX + XA^T - BR^{-1}B^T + gD_A D_A^T \\ &+ (v + \epsilon) D_B D_B^T + (v_{\text{inv}} + \epsilon_{\text{inv}}) BR^{-1} E_B^T E_B R^{-1} B^T, \\ \sigma_1 &= S_2 A_{11} + A_{11}^T S_2 + Y A_{21} + A_{21}^T Y^T, \\ Y &= S_2 L, Z = \begin{bmatrix} S_2 & Y \end{bmatrix} \\ G_1 &= E_B R^{-1} B^T S_1 P, G_2 = D_A^T Z^T, G_3 = D_B^T Z^T, \\ G_4 &= B^T S_1 P, \sigma_4 = \frac{1}{2} (S_1 (\sigma_0 + m_0 m_0^T) + (\sigma_0 + m_0 m_0^T)^T S_1), \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2} (S_2 \sigma_{11} + \sigma_{11} S_2), \sigma_2 = \frac{1}{2} (Y \sigma_{21} + \sigma_{21}^T Y^T) \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} (Y^T \sigma_{12} + \sigma_{12}^T Y), \sigma_{22}^{-1/2} = [v_1, v_2, \dots, v_m] \\ \sigma_0 &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, e_{ik} = \begin{bmatrix} 0^T & 1 & 0^T \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

memiliki penyelesaian

$$S_1 > 0, S_2 > 0, X > 0, Y, Z, \sigma_0 > 0, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0, \sigma_4 > 0,$$

yang memenuhi hubungan invers:

$v^{-1} = v_{\text{inv}}, \epsilon^{-1} = \epsilon_{\text{inv}}, \mu^{-1} = \mu_{\text{inv}},$ dan $S_1^{-1} = X$ maka kendali berbasis pengamat orde minimum (8)-(10) merupakan pengendali *guaranteed cost* dengan nilai yang diekspektasi minimal sebagai berikut:



$E[J^*] = [x^T(0)S_1x(0) + \int_0^\infty (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)) dt]$ (17)
dimana $(t) = z(t) - Tx(t)$ adalah error estimasi dari pengamat orde minimum.

Mengingat pertidaksamaan pada pers. (14) dan (15) mempunyai hubungan invers, maka algoritma iteratif berbasis LMI perlu diimplementasikan [5], [6].

Bukti teorema 1:

Persamaan (1) –(2) menghasilkan sistem untai tertutup

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

dimana

$$\Phi_1 = A + A(t) + (B + \Delta B(t))K, \Phi_2 = (B + \Delta B(t))KP, \\ \Phi_3 = -T \quad -T \quad (t)K, \Phi_4 = D - T \quad (t)KP$$

Dengan mendefinisikan fungsi Lyapunov untuk kestabilan sistem

$$V(t) = x^T(t)S_1x(t) + \int_0^\infty z^T(t)S_2z(t) dt \quad (19)$$

Turunan dari pers. (19) dapat dituliskan:

$$\dot{V}(t) = w^T(t)w(t) - (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) \quad (20)$$

dimana

$$w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix}, \\ \Lambda_1 = S_1(A + A(t)) + (A + A(t))^T S_1 - S_1BR^{-1}B^T S_1 + Q - 2S_1 \quad B(t)R^{-1}B^T S_1,$$

$$\Lambda_2 = -S_1\Delta B(t)R^{-1}B^T S_1P - \Delta A^T(t)T^T S_2 + S_1BR^{-1}\Delta B^T(t)T^T S_2 \\ \Lambda_3 = S_2D + D^T S_2 + P^T S_1BR^{-1}B^T S_1P + 2S_2T\Delta B(t)R^{-1}B^T S_1P,$$

Dengan kondisi

$$\Omega < 0, \quad (21)$$

maka pers. (20) menjadi

$$\dot{V}(t) < -(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) < 0 \quad (22)$$

untuk semua $x(t) \neq 0$, dan sistem untai tertutup stabil asimptotik.

Dengan menggunakan pers. (5)-(6) pada pers. (22), kemudian dikalikan dengan $diag(S_1^{-1}, I)$ dikedua sisi, substitusi $X = S_1^{-1}, Y = S_2L, v_{inv} = v^{-1}, u_{inv} = u^{-1}, \tilde{v}_{inv} = \tilde{v}^{-1}, \tilde{\epsilon}_{inv} = \tilde{\epsilon}^{-1}$, dan mengaplikasikan Schur complement [7], maka pers. (13)-(14) terbukti.

Selanjutnya, dengan mengintegrasikan pers. (22) dari 0 sampai T, dimana T tak hingga akan menghasilkan

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \\ < x^T(0)S_1x(0) + \int_0^\infty z^T(t)S_2z(t) dt = J^* \quad (23)$$

dimana J^* merupakan nilai *guaranteed cost*. Kemudian, nilai optimal yang diekspektasi, dapat dituliskan,

$$E[J^*] = trS_1E[x(0)x^T(0)] + trS_2E[z(0)z^T(0)] \quad (24)$$

Relasi antara rerata dan kovarian $x(0)$ dapat dituliskan

$$\Sigma_0 = E[x(0)x^T(0)] - m_0m_0^T \quad (25)$$

Substitusi pers. (25) ke pers. (24) menghasilkan

$$E[J^*] = trS_1(\Sigma_0 + m_0m_0^T) + trS_2E[(z(0) - Tx(0))(z(0) - Tx(0))^T] \quad (26)$$

Dari pers. (26), dapat dituliskan

$$E[(z(0) - Tx(0))(z(0) - Tx(0))^T] = T\Sigma_0T^T + (z(0) - Tm_0)(z(0) - Tm_0)^T \quad (27)$$

Dengan demikian, maka pers. (26), dapat dituliskan lagi sebagai berikut:

$$E[J^*] = trS_1(\Sigma_0 + m_0m_0^T) + trS_2(T\Sigma_0T^T + (z(0) - Tx(0))(z(0) - Tx(0))^T) \quad (28)$$

Substitusi pers. (27) ke pers. (28), diperoleh

$$E[J^*] = trS_1(\Sigma_0 + m_0m_0^T) + trS_2(\Sigma_{11} + L\Sigma_{21} + \Sigma_{12}L^T + L\Sigma_{22}L^T) \quad (29)$$

$$\text{dimana } \Sigma_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Kita bisa mendeskripsikan pers. (29) menjadi beberapa pertidaksamaan berikut:

$$trS_1(\Sigma_0 + m_0m_0^T) < X_0 \quad (30)$$

$$trS_2\Sigma_{11} < X_1 \quad (31)$$

$$trS_2L\Sigma_{21} < X_2 \quad (32)$$

$$trS_2\Sigma_{12}L^T < X_3 \quad (33)$$

$$trS_2L\Sigma_{22}L^T < X_4 \quad (34)$$

Dengan meminimisasi $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, akan meminimisasi $E[J^*]$, dan karena $tr(AB) = tr(BA)$ maka pers. (30)-(33) membuktikan pers. (15).

Berikutnya, dengan mendefinisikan

$$\Sigma_{22}^{-1} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_m],$$

pers. (34) dapat dihitung sebagai berikut:

$$tr S_2 L \Sigma_{22} L^T = v_1^T Y^T S_2^{-1} Y v_1 + v_2^T Y^T S_2^{-1} Y v_2 + \dots + v_m^T Y^T S_2^{-1} Y v_m$$

$$= [v_1^T Y^T \quad v_2^T Y^T \quad \dots \quad v_m^T Y^T] S_2^{-1} \begin{bmatrix} Y v_1 \\ Y v_2 \\ \vdots \\ Y v_m \end{bmatrix} \quad (35)$$

Selanjutnya, dengan *Schur complement* maka pers.(35) mengacu pada pers.(16).

Perlu dicatat bahwa pertidaksamaan pada pers. (13)-(14) tidak dapat diselesaikan dengan metode pertidaksamaan matrik linier (LMI) secara langsung karena adanya relasi berkebalikan pada peubah-peubah yang muncul.

Penyelesaian pada makalah ini mengaplikasikan pendekatan *cone complementarity linearization* [6]

3. Contoh numeric

Suatu sistem linier tak stabil dengan ketidakpastian memiliki parameter-parameter berikut ini:

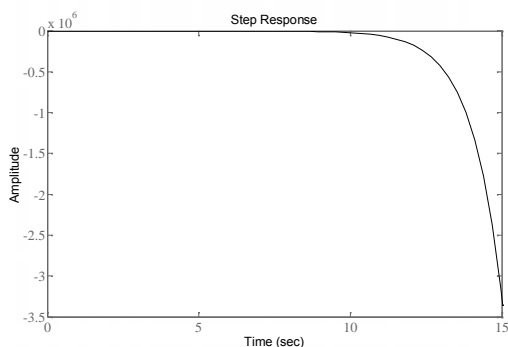
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

Parameter-parameter ketidakpastian:

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$D_B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$F_A = F_B = \sin t,$$



Gambar 1. Tanggapan unit step system untai terbuka

Gambar 1. menunjukkan tanggapan sistem untai terbuka dengan masukan unit step. Selanjutnya, solusi

yang dihasilkan dengan algoritma iteratif berbasis pertidaksamaan matrik linier pada pers. (13)-(16), sebagai berikut:

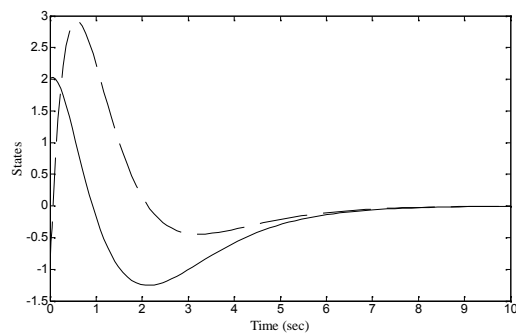
Gain kendali dan pengamat, masing-masing $K = [-3.4363 \quad 1.3499]$, $L = 2.4142$, *upper bound* indeks kinerja $J^* = 38.3074$ yang merupakan nilai *guaranteed cost*, dan beberapa peubah yang memiliki relasi kebalikan berikut ini

$$S_1 = \begin{bmatrix} 3.4363 & -1.3499 \\ -1.3499 & 2.7101 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0.3618 & 0.1802 \\ 0.1802 & 0.4587 \end{bmatrix},$$

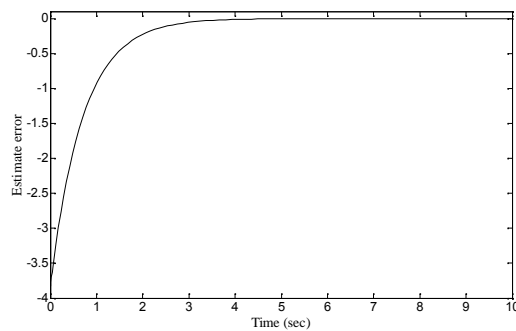
dan

$$v = 0.0138, v_{inv} = 72.6004.$$

Trayektori keadaan sistem dan error estimasi dengan kondisi awal $x(0) = [-1 \quad 2]^T$ ditunjukkan oleh gambar 2 dan gambar 3 berikut



Gambar 2. Trayektori state x_1 (--) dan x_2 (-)



Gambar 3. Trayektori error estimasi

Terlihat bahwa trayektori *state* sistem menuju kestabilan asimptot dan error estimasinya mendekati nol.

4. KESIMPULAN

Makalah ini mempresentasikan skema desain pengendali *guaranteed cost* berbasis pengamat orde minimum pada sistem tak pasti waktu kontinyu. Permasalahan diselesaikan dalam bentuk pertidaksamaan matrik linier. Berdasarkan contoh numerik, desain kendali dan pengamat menghasilkan sistem yang stabil dengan nilai *guaranteed cost* J^* .



5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini sebagian dilaksanakan penulis dibawah bimbingan Prof. Mitsuaki Ishitobi, *Intelligent Control Lab*, Kumamoto University, Jepang.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Chang, S.S.L and Peng, T.K.C. (1972). *Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters*. IEEE Trans. on Automatic Control, 17(4), pp. 474-483.
- [2]. Mahmoud, M.S. (2001) *Control of uncertain state-delay systems: guaranteed cost approach*. IMA J Math Contr and Info, 18(1), pp. 109-128.
- [3]. Lien, C.H. (2005) *Guaranteed cost observer-based controls for a class of uncertain neutral time-delay systems*. J Optim Theory and Appl, 126(1), pp. 137-156.
- [4]. Susanto, E., Tamura, T., Ishitobi, M and Kunimatsu. (2012). *An application of guaranteed cost control to a 3-DOF model helicopter*. Proc of the 17th Int Symp. on Artificial Life and Robotics, Beppu Oita, Japan, Jan 19-21, pp. 271-274.
- [5]. Cao, Y., Lam, J. and Sun, Y. (1998). *Static output feedback stabilization: an ILMI approach*. Automatica, 34(12), pp. 1641-1645.
- [6]. Ghaoui, El., Oustry, F. and AitRami, M (1997). *A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems*. IEEE Trans. on Automatic Control, 42(8), pp. 1171-1176.
- [7]. Boyd, S., Ghaoui, El., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, PA:SIAM